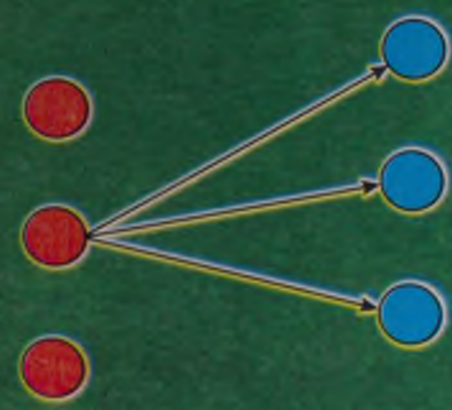
A.H.Əliyev

RİYAZI PROQRAMLAŞDIRMA



RİYAZI PROQRAMLAŞDIRMA

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL PROBLEMLƏRİ İNSTİTUTU
AZƏRBAYCAN DÖVLƏT İQTİSAD UNİVERSİTETİ

«İqtisadi kibernetika və iqtisadi - riyazi üsullar» kafedrası

A.H.Əliyev

RİYAZİ PROQRAMLAŞDIRMA

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi Elmi-Metodik Şurasının «İqtisadiyyat» bölməsinin 23 aprel 2003-cü il tarixli iclasının 18 saylı protokolu ilə təsdiq edilmişdir.

BAKI – 2004

M Ü Ə L L İ F

i.e.n., dos. ALXAN HÜMBƏT OĞLU ƏLİYEV

ADİU-nun «İqtisadi kibernetika və iqtisadi-riyazi üsullar» kafedrasının müdiri, **i.e.d., professor B.S.MUSAYEVİN** ümumi rəhbərliyi altında yazılmışdır.

REDAKTOR: b/m Y.İ.HACIZALOV

Annotasiya

Tədris - metodik vəsait qiyabi təhsil və iqtisadi ixtisasların spesifik xüsusiyyətləri nəzərə alınmaqla hazırlanmışdır. Burada «Riyazi proqramlaşdırma» fənninin ayrı – ayrı mövzularının öyrənilməsi üzrə nəzəri əsaslar verilir, onların ən vacib müddəaları şərh olunur və mənimsənilməsi ardıcıllığı göstərilir. Bununla bərabər hər bir mövzu üzrə alınmış biliklərin möhkəmləndirilməsi məqsədi ilə təkrar üçün müvafiq suallar və tələbələrin müstəqil işləri yerinə yetirməsi ilə əlaqədar nümunəvi iqtisadi məsələlərin həllinə aid göstərişlər və izahatlar gətirilir.

Vəsaitdən həmçinin iqtisadi ali məktəblər və fakultələrdə əyani təhsil alan tələbələr, aspirantlar və müəllimlər də istifadə edə bilərlər.

MÜNDƏRİCAT

SÖZÖNÜ

Müasir iqtisadçı tədqiq edilən iqtisadi obyektlərin, proseslərin dolğun təhlilini aparmağı, onların analitik asılılıq və qrafiklər vasitəsi ilə formalaşdırılmış yazılışına keçməyi bacarmalıdır. O, həmçinin konkret məsələlərin riyazi modelləri və onların əsasında alınmış həll nəticələri altında müvafiq iqtisadi mahiyyəti dərk etməli, məsələlər üzrə hərtərəfli izahat verməlidir.

Bazar iqtisadiyyatı şəraiti və münasibətlərinin formalaşması xüsusiyyətləri nəzərə alınmaqla riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin dərindən mənimsənilməsi, onun əsaslı iqtisadi təhlil ilə birlikdə istifadə olunması iqtisad elmi və praktiki tətbiq üçün yeni imkanlar yaradır.

Təqdim edilən tədris - metodik vəsaitin başlıca məqsədi – «Riyazi proqramlaşdırma» fənninin öyrənilməsi prosesində, ali məktəblərdə iqtisadi ixtisaslar üzrə bakalavr təhsili alan, II kurs qiyabiçi - tələbələrə köməklik etməkdən ibarətdir.

Tədris - metodik vəsaitdə başlıca diqqət, riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin ayrı - ayrı inkişaf istiqamətləri üzrə mühüm anlayışlar, tə‘riflər, teoremlər, prinsiplər və üsulların öyrənilməsində cəmləşdirilir. Bununla bərabər tədris edilən hər bir mövzu üzrə iqtisadi məsələnin mahiyyəti, onun müvafiq riyazi modelinin qurulması, praktiki məsələ həlli nəticələrinin tədqiq və təhlil edilməsinə də xüsusi əhəmiyyət verilir.

Bu münasibətlə vəsaitdə tələbələr tərəfindən fənnin ayrı-ayrı mövzularının mənimsənilməsi məqsədi ilə metodik göstərişlər təklif olunur. Hər bir mövzunun əsas müddəaları verilməklə, onların ardıcıl olaraq öyrənilməsi göstərilir, nisbətən çətin suallar aydınlaşdırılır, təkrar üçün suallar verilir, müvafiq əsas və əlavə ədəbiyyat tövsiyə edilir.

Tədris-metodik vəsaitdə həmçinin tələbələrin müstəqil işləri yerinə yetirməsi ilə əlaqədar zəruri göstərişlər və beş variantda hazırlanmış tapşırıqlar verilir, onlara aid nümunəvi iqtisadi məsələlərin həllinə baxılır.

Tədris vəsaitinin hər bir bölməsində onun özünəməxsus nömrələmə aparılmışdır. Buna görə də ayrı-ayrı paraqraf, teorem, tərif, qeyd, cədvəl, şəkil, misal və düsturların nömrələrinə müraciətlər yalnız verilmiş bölməyə aid olur.

FƏNNİN ÖYRƏNİLMƏSİ ÜZRƏ ÜMUMİ GÖSTƏRİŞLƏR

Hər şeydən əvvəl, tələbə bilməlidir ki, «Riyazi proqramlaşdırma» nəzəriyyəsinin tətbiqi elmi - praktiki nöqteyi nəzərdən ən yaxşı qərarların qəbul edilməsi və onların praktiki olaraq reallaşdırılması nəticəsində zəruri səmərəliliyin əldə edilməsini tə'min edir. Bu isə ali tədris müəssisələrində müvafiq fənnin öyrənilməsinin vacib olduğunu göstərir. Bununla bərabər, tələbələr fənni elə səviyyədə mənimsəməlidirlər ki, onlar nəinki verilmiş praktiki məsələlərin mahiyyətlərini başa düşməli, həmçinin tədris prosesində məsələləri həll etməli və alınmış nəticələrin hərtərəfli təhlilini aparmalıdırlar.

«Riyazi proqramlaşdırma» fənni üzrə təqdim edilən tədris - metodik vəsait qiyabi təhsilin spesifik xüsusiyyətləri nəzərə alınmaqla hazırlanmış və ilk növbədə tələbələrin müstəqil işləmələri, verilmiş tapşırıqların yerinə yetirilməsi gedişində məsələlərin həlli ilə əlaqədar prinsipial müddəaların mənimsənilməsinə yönəldilmişdir.

Yuxarıda göstərilənlərə uyğun olaraq fənnin məqsədi kimi qiyabiçi-tələbələrə riyazi proqramlaşdırma məsələlərinin qoyuluşunu, onların həlli üçün tətbiq edilən ən yaxşı üsulları və nəticələri təhlil etməyi öyrətmək çıxış edir. Bunun da əsasında tədqiqat obyektinin optimal, ən məqsədəuyğun fəaliyyəti tə'min edilir.

Fənnin öyrənilməsi kafedrada təsdiq olunmuş nümunəvi proqrama uyğun mövzular üzrə həyata keçirilməlidir.

Tədris prosesində aktiv formaya üstünlük vermək lazımdır. Müvəffəqiyyətin rəhni – tələbələrin müntəzəm olaraq işləməsidir. Bu isə kafedrada hazırlanmış və təsdiq edilmiş praktiki məşğələlər və müstəqil işlərin mövzular üzrə yerinə yetirilməsi planlarına müvafiq aparılmalıdır. Dərslərin gedişi prosesində fənnin ayrı-ayrı mövzuları üzrə kafedranın tövsiyə etdiyi əsas və əlavə ədəbiyyatdan müntəzəm olaraq istifadə olunmalıdır.

İcmal mühazirələr məcburidir və onlar auditoriya dərslərinin əsasını təşkil edir. Burada iştirak etməklə tələbələr gələcəkdə öyrənilməsi tələb olunan fənnin mühüm metodik müddəaları və problemləri ilə tanış olurlar. Oxunan hər bir mühazirənin sonunda tələbələrə növbəti mühazirənin mövzusu və məqsədi haqqında qısa məlumat verilməlidir ki, bu da mühazirənin aktiv formada aparılmasına, müvafiq materialın qabaqcadan mənimsənilməsi səviyyəsindən asılı olaraq hər bir mühazirədə lazımi düzəlişlərin edilməsinə imkan verir.

Alınmış biliyin möhkəmləndirilməsi üçün daha mürəkkəb olan ayrı-ayrı mövzular üzrə tələbələrlə praktiki məşğələlər aparılır, xüsusi tapşırıqların yerinə yetirilməsi yaxud auditoriya işlərinin aparılması prosesində müvafiq məsələlər həll edilir.

Zəruriyyət olduğu halda isə tələbələrə ADİU - nun «İqtisadi kibernetika və İRÜ» kafedrasının müəllimləri tərəfindən əlavə vaxtlarda kollektiv və fərdi məsləhətlər verilir.

Fənnin mənimsənilməsi o vaxt qənaətbəxş hesab edilir ki, tələbə sərbəst olmaqla və nəzərdə tutulmuş müddətdə öz variantına aid müstəqil işin bütün tapşırıqlarını yerinə yetirsin, hər bir məsələnin həlli ilə əlaqədar tələb olunan ətraflı izahatları verə bilsin.

Aşağıda fənnin ayrı-ayrı mövzularının mənimsənilməsi prosesində lazım olan əsas müddəalar və onların öyrənilməsi ardıcıllığı verilir.

FƏNNİN AYRI-AYRI MÖVZULARININ ÖYRƏNİLMƏSİ ÜZRƏ METODİK GÖSTƏRİŞLƏR

Mövzu 1. RİYAZİ PROQRAMLAŞDIRMANIN ƏSAS ANLAYIŞLARI

«Riyazi proqramlaşdırma» fənninin öyrənilməsini onun obyektinin, predmetinin və məqsədinin müəyyən edilməsi, iqtisadi tədqiqatlarda, xüsusilə də sosial-iqtisadi sistem və proseslərin optimal fəaliyyətini təmin etmək üçün idarəetmə qərarlarının qəbul edilməsində müvafiq nəzəriyyə və müasir kompüter texnikasından istifadənin zəruriliyi və səmərəliliyinin əsaslandırılmasından başlamaq lazımdır.

Burada riyazi proqramlaşdırmanın ümumi məsələsinin qoyuluşu, verilmiş problemdən asılı olaraq onun məqsəd funksiyasının (optimallıq meyarının) seçilməsi və məhdudiyyət şərtlərinin formalaşması məsələlərinə mühüm diqqət yetirmək tələb olunur.

Tədqiq edilən ekstremum məsələlərin məqsəd funksiyaları və məhdudiyyət şərtlərinin xassələri nəzərə alınmaqla riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin özü, ümumiyyətlə, xətti və qeyri-xətti proqramlaşdırma nəzəriyyələrinə bölünür. Ona görə də xətti, qeyri-xətti, qabarıq, kvadratik, tamədədli, parametrik, kəsr-xətti, stoxastik və dinamik proqramlaşdırma məsələlərinin təriflərini vermək məqsədəuyğundur. Bununla bərabər riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin qısa inkişaf tarixi, onun üsul və prinsiplərinin köməkliyi ilə həll edilən məsələlər ilə tanışlıq da tələbələr üçün xüsusi maraq kəsb etməlidir.

Fənnin öyrənilməsi prosesində «model» və «modelləşdirmə» anlayışlarına tez-tez rast gəlindiyi üçün, onların mahiyyətini və qarşılıqlı əlaqələrini bilmək zəruridir. Eyni zamanda modelləşdirmənin tərkib elementlərinin (tədqiqat obyekti, subyekt və model) fəaliyyətinə, müvafiq prosesin təşkil olunduğu mərhələlərin mahiyyəti və dövrü xarakterinə xüsusi diqqət yetirmək, modelləşdirmə dövrünün ümumi sxemində bunların hamısını göstərməyi bacarmaq lazımdır.

Burada həmçinin qoyulmuş məsələnin iqtisadi-riyazi modelinin qurulması və müvafiq obyekt-orijinalın iqtisadi-riyazi modelləşdirilməsi proseslərinin tədqiqi məsələləri vacib əhəmiyyət kəsb edir. Tələbə iqtisadi-riyazi modelləşdirmə prosesində mərhələlərin ardıcıl və qayıtma əlaqələrinin xarakterik xüsusiyyətlərini göstərməli, onların modelləşdirmənin ümumi sxemindəki mərhələlər ilə müqayisəli izahını mənimsəməlidir.

Təkrar üçün suallar

1. Riyazi proqramlaşdırma fənninin obyekti, predmeti və öyrənilməsindən məqsədin təriflərini söyləyin.
2. Riyazi proqramlaşdırmanın ümumi məsələsinin qoyuluşunu yazın.
3. Riyazi proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllinin mümkün həlldən fərqi nədən ibarətdir? Məsələni həll etməkdən məqsəd nədən ibarətdir?
4. Xətti, qeyri-xətti, qabarıq, kvadratik, tamədədli, parametrik, kəsr-xətti, stoxastik və dinamik proqramlaşdırma məsələlərinin təriflərini verin.
5. Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin qısa inkişaf tarixini danışın.
6. «Model» və «modelləşdirmə» anlayışlarının təriflərini söyləyin.
7. Modelləşdirmə prosesinin hansı tərkib elementləri vardır?
8. Modelləşdirmənin ümumi sxemi hansı mərhələlərdən ibarətdir?
9. Modelləşdirmə prosesinin dövrü xarakterinin mahiyyəti nədən ibarətdir?
10. İqtisadi-riyazi model nəyə deyilir?
11. İqtisadi-riyazi modelin qurulması prosesi hansı mərhələlərdən ibarətdir?

12. İqtisadi-riyazi modelləşdirmə prosesinin mərhələləri arasında hansı qarşılıqlı əlaqələr mövcuddur?
13. İqtisadi-riyazi modelləşdirmə prosesi və modelləşdirmənin ümumi sxeminin mərhələləri arasındakı qarşılıqlı əlaqələri müqayisəli təhlil edin.

Ədəbiyyat: [1, səh.34-35], [3, səh.33-35], [4, səh.4-5], [7, səh.5-17], [9, səh.4-6], [10, səh.516-518], [11, səh.127-130], [12, səh.7-19], [13, səh.11-21], [15, səh.7-31]

Mövzu 2. XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN ƏSASLARI

«Xətti proqramlaşdırma» nəzəriyyəsi riyazi proqramlaşdırmanın ən çox öyrənilmiş bölməsi olmaqla, müxtəlif xarakterə malik iqtisadi məsələlərin həlli üçün geniş tətbiq edilir. Bu məsələlərin iqtisadi-riyazi modelləri bir-birindən fərqli olan qoyuluşlara malik ola bilərlər. Buna görə də tələbə XP-nin ümumi, standart (simmetrik), kanonik (əsas) məsələlərinin, həmçinin onun mümkün, dayaq və optimal həllərinin (planlarının) təriflərini bilməli, mahiyyətlərini başa düşməlidir. O, XP məsələsinin geniş, vektor, matris şəklində və ($\sum$) işarəsindən istifadə etməklə yazılış formalarını fərqləndirməyi bacarmalıdır.

Burada işlənilən XP məsələsinin ümumi, simmetrik, yaxud əsas məsələyə gətirilməsi məsələləri də mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Eyni zamanda «max» XP məsələsinin müvafiq «min» XP məsələsinə gətirmək üçün ümumi qaydaları formalaşdırmaq lazımdır və əksinə.

Bununla bərabər xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsi əsasında bir sıra sadə məsələlərin iqtisadi-riyazi modellərinin qurulması xüsusi maraq kəsb edir. Onların həlli məqsədi ilə mövcud üsul, alqoritm və EHM-də işlənmiş standart proqramlar müvəffəqiyyətlə tətbiq edilir. Belə məsələlərə misallar olaraq ehtiyatlardan optimal istifadə, materialların optimal biçilməsi, optimal yem rasionunun təyini (yaxud pəhriz məsələsi), avadanlıqların optimal yüklənməsi, istehsal və istehlak məntəqələri arasında optimal yükdaşıma həcmlərinin təyini məsələlərini və s. göstərmək olar.

Tələbə, əvvələ, şərti ədədi məlumatları nəzərə almaqla, hər bir məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurmağı bacarmalıdır. Daha sonra isə məsələnin iqtisadi qoyuluşunun ümumiləşdirilməsi aparılmalı və daha yığcam şəkildə onun müvafiq iqtisadi-riyazi modeli ifadə olunmalıdır.

Təkrar üçün suallar

1. XP-nin ümumi məsələsi standart və kanonik məsələlərdən nə ilə fərqlənir?
2. XP məsələsinin mümkün, dayaq və optimal həllərinin təriflərini verin.
3. XP məsələsinin müxtəlif şəkildə yazılışları hansı xüsusiyyətlərə malikdir?
4. Bərabərsizlikdən ibarət məhdudiyyət şərtini müvafiq bərabərlikdən ibarət məhdudiyyət şərtinə gətirərkən hansı hallar mümkündür?
5. Əlavə (yaxud asılı) məchul nəyə deyilir?
6. Bərabərsizlikdən ibarət məhdudiyyət şərtinin çevrilməsi hansı teoremə əsasən yerinə yetirilir?
7. İstənilən XP məsələsini əsas məsələyə gətirmək üçün hansı ümumi qaydalar tətbiq edilir?
8. Şərti ədədi məlumatlardan istifadə etməklə ehtiyatlardan optimal istifadə məsələsinin iqtisadi qoyuluşu və modeli.
9. Ehtiyatlardan optimal istifadə məsələsinin ümumi qoyuluşu və yığcam modeli.
10. Şərti ədədi məlumatlardan istifadə etməklə materialların optimal biçilməsi məsələsinin iqtisadi qoyuluşu

və modeli.

11. Materialların optimal biçilməsi məsələsinin ümumi qoyuluşu və yığcam modeli.
12. Şərti ədədi məlumatlardan istifadə etməklə optimal yem rasionunun tərtibi məsələsinin iqtisadi qoyuluşu və modeli.
13. Optimal yem rasionunun tərtibi məsələsinin ümumi qoyuluşu və yığcam modeli.
14. Şərti ədədi məlumatlardan istifadə etməklə avadanlığın optimal yüklənməsi məsələsinin iqtisadi qoyuluşu və modeli.
15. Avadanlığın optimal yüklənməsi məsələsinin ümumi qoyuluşu və yığcam modeli.
16. Qarşılıqlı əvəzedilən avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələlərində məqsəd funksiyasının hansı növlərini seçmək mümkündür?

Ədəbiyyat: [2, səh.31-33], [3, səh.35-39], [4, səh.6-16], [5, səh.187-200], [6, səh.122-146], [7, səh.17-27], [8, səh.7-20], [9, səh.7-14], [10, səh.518-524], [11, səh.130-137], [12, səh.20-30], [14, səh.69-82]

Mövzu 3. XP MƏSƏLƏSİNİN HƏLLƏRİNİN XASSƏLƏRİ

Bu mövzunun öyrənilməsi prosesində ikiölçülü və n – ölçülü hallarda nöqtələrin qabarıq xətti kombinasiyasının mahiyyəti və tərifləri, qabarıq çoxluğun cəbri və həndəsi tərifləri, həmçinin daxili, sərhəd, kənar və təpə nöqtələrin, qapalı, məhdud və qeyri-məhdud çoxluqların təriflərinə baxılır. Burada qabarıq çoxbucaqlılar (çoxüzlülər) və onlara dayaq olan düz xətlərə (müstəvilərə) xüsusi dəiqqət yetirmək lazımdır.

Tələbə qabarıq çoxluqların kəsişməsi haqqında mövcud teoremi söyləməli və isbat etməlidir ki, hər bir qabarıq çoxbucaqlı (çoxüzlü) öz kənar (təpə) nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyasından ibarətdir. Bununla əlaqədar o müvafiq misallar da gətirməyi bacarmalıdır.

XP məsələsinin həllərinin xassələri haqqında teoremlər də mühüm əhəmiyyət kəsb edirlər. İsbat etmək lazımdır ki, XP məsələsinin bütün həllər çoxluğu qabarıqdır, onun məqsəd funksiyası isə öz ekstremum qiymətini bu çoxluğun kənar nöqtəsində alır.

Doğrudan da müəyyən edilir ki, çoxluğun istənilən nöqtəsi məsələnin mümkün həllinə, onun kənar nöqtəsi isə dayaq həllə uyğundur. Bununla bərabər məqsəd funksiyasının maksimum (minimum) qiymət aldığı ekstremum nöqtə çoxluğun kənar nöqtələrindən, heç olmazsa, biri ilə üst-üstə düşür və o XP məsələsinin optimal həllinə uyğundur.

Burada XP məsələsinin dayaq həlləri və onun həllər çoxluğunun kənar nöqtələri arasındakı qarşılıqlı əlaqələrin olması xüsusi maraq kəsb edir. Bu münasibətlə müvafiq teoremləri öyrənmək və onlardan alınmış nəticələri əsaslandırmaq tələb olunur. Tələbə belə nəticəyə gəlməlidir ki, XP məsələsinin həlli prosesində, sonsuz sayda həllərin tədqiq edilməsi əvəzində onlardan yalnız sonlu sayda dayaq həlləri nəzərdən keçirmək kifayətdir. Məhz bu məsələnin optimal həllinin tapılması prosesini sürətləndirilməyə, yəni əlavə hesablamaların aparılmamasına imkan verir.

Təkrar üçün suallar

1. İkiölçülü və n – ölçülü hallarda nöqtələrin qabarıq xətti kombinasiyasının təriflərini söyləyin.
2. Qabarıq çoxluğun cəbri və həndəsi təriflərinin mahiyyəti nədə ibarətdir?
3. Çoxluğun daxili, sərhəd, kənar və təpə nöqtələrinin hansı fərqli xüsusiyyətləri vardır?

4. Qapalı, məhdud və qeyri-məhdud çoxluqlar hansı əlamətlərinə görə fərqlənirlər?
5. Qabarıq çoxbucaqlı (çoxüzlü) və ona dayaq olan düz xətt (müstəvi) nəyə deyilir?
6. Qabarıq çoxluqların kəsişməsi haqqında teoremi söyləyin və isbat edin.
7. Qabarıq çoxbucaqlı (çoxüzlü) öz kənar (təpə) nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası kimi.
8. XP məsələsinin həllərinin xassələri haqqında hansı teoremlər vardır?
9. XP məsələsinin dayaq həlləri və həllər çoxluğunun kənar nöqtələrinin qarşılıqlı əlaqələri haqqında hansı teoremlər vardır?
10. XP məsələsinin dayaq həlləri və həllər çoxluğunun kənar nöqtələrinin qarşılıqlı əlaqələri haqqında teoremlərdən hansı nəticələr alınır?
11. İstənilən XP məsələsinin prinsipial həlli yolunun mahiyyəti nədən ibarətdir?

- 6567 -

Ədəbiyyat: [1, səh.7-34], [2, səh.33-35], [3, səh.38-39], [4, səh.16-18], [7, səh.32-54], [8, səh.21-32], [9, səh.14-44], [10, səh.532-539], [11, səh.116-126], [12, səh.21-27], [15, səh.32-59]

Mövzu 4. XP MƏSƏLƏSİNİN HƏNDƏSİ İZAHI

İlk növbədə tələbə nəzərdə tutmalıdır ki, XP məsələsinin həlli üsullarından biri də qrafik üsuldur və o, verilmiş məsələnin müvafiq həndəsi izahına əsaslanır. Məqsəd funksiyasının ekstremum qiyməti həllər çoxüzlüsünün heç olmazsa bir kənar nöqtəsində alındığından, XP məsələsinin optimal həllinin tapılması üçün həllər çoxüzlüsünün bütün kənar nöqtələrini tədqiq etmək tələb olunur. Buna görə də bütün ayaq həllərin ixtiyari olaraq yox, onların məsələnin optimal həllinə yaxınlaşması nöqteyi-nəzərdən seçilməsi xüsusi maraq kəsb edir.

Bu münasibətlə səviyyə xəttinin (səthinin) mahiyyətini başa düşmək, bir səviyyə xəttindən (səthindən) digərinə keçdikdə XP məsələsinin məqsəd funksiyasının qiymətlərinin dəyişməsi haqqında teoremi söyləmək və isbat etmək lazımdır.

Tələbə bilməlidir ki, XP məsələsinin həlli məqsədi ilə qrafik üsuldan istifadə edilməsi, əsasən ikiölçülü və üçölçülü hallarda, həmçinin məsələnin kanonik şəkildə yazılışında sərbəst məchulların sayı ikidən çox olmadığı çoxölçülü hallarda yerinə yetirilir.

İstənilən XP məsələsinin qrafik üsulla həlli prosesi bir neçə mərhələdən ibarətdir. Onlara məsələnin həllər çoxluğunun (oblastının) təyini; məqsəd funksiyasının qiymətlərinin dəyişməsi istiqamətini göstərən normal vektorun (radius-vektorun) qurulması (aydındır ki, bu vektora əks istiqamətdə funksiyanın qiymətləri azalır; normal vektora perpendikulyar olan $Z(X)=0$ düz xəttinin qurulması; ekstremum (dayaq) nöqtənin tapılması; məsələnin optimal həllinin təyin edilməsi; məqsəd funksiyasının ekstremum qiymətinin hesablanması mərhələləri aiddir.

Əgər verilmiş XP məsələsinin həllər çoxluğu qeyri-məhdud oblastdan ibarət olarsa, bu zaman mümkün olan bütün hallara da həmçinin xüsusi diqqət yetirmək tələb olunur.

Təkrar üçün suallar

1. Səviyyə xətti nəyə deyilir?
2. Normal vektor necə təyin edilir?
3. XP məsələsinin məqsəd funksiyasının qiymətlərinin dəyişməsi haqqında teoremi söyləyin və isbat edin.
4. XP məsələsinin həndəsi izahı nədən ibarətdir?
5. Qrafik üsul hansı XP məsələsinin həlli üçün tətbiq edilir?
6. XP məsələsinin həllər çoxluğu necə təyin edilir?
7. Nə zaman XP məsələsinin həlli yoxdur?

8. XP məsələsinin qrafik üsulla həlli prosesi hansı mərhələlərdən ibarətdir?
9. Ektremum (dayaq) nöqtənin tapılması üsulları.
10. Nə zaman XP məsələsinin yeganə, sonsuz sayda optimal həlləri vardır və optimal həlli yoxdur?
11. Əgər XP məsələsinin həllər çoxluğu qeyri-məhdud olarsa, onda hansı hallar mümkündür?
12. «max» və «min» XP məsələlərinin qrafik üsulla həlli proseslərinin fərqi nədən ibarətdir?

Ədəbiyyat: [1, səh.35-55], [2, səh.35-61], [3, səh.38-46], [4, səh.18-29], [5, səh.200-214], [6, səh.27-32], [7, səh.55-63], [9, səh.44-51], [10, səh.525-531], [11, səh.137-155], [12, səh.49-55], [14, səh.82-90], [15, səh.59-68]

Mövzu 5. XP - də XƏTTİ CƏBRİN TƏTBİQİ

Bu mövzunun mənimsənilməsi üçün xətti tənliklər sistemi və onun həlli, uyuşan və uyuşmayan, eynigüclü və ekvivalent sistemlər, sistemdə sadə çevirmələr, sistemin ranqı və müvafiq nəticələr, əsas və qeyri-əsas məchullar, bazis həlli və onun növlərinin təriflərini öyrənmək lazımdır.

Tələbə xətti tənliklər sistemində asılı və asılı olmayan məchulların təriflərinə, sistemin cədvəl şəklində göstərilməsinə, əsas elementin, əsas sətir və sütunun seçilməsi qaydalarına xüsusi diqqət yetirməlidir. Adi Jordan əvəzetməsi (AJƏ) üsulu ilə bir addım etmək üçün tələb olunan beş əməliyyatı ardıcıl olaraq yadda saxlamaq lazımdır.

AJƏ üsulunu praktiki olaraq tətbiq etmək üçün əvvəlcə Steynis teoremini bilmək və isbat etmək tələb olunur. Daha sonra matrisin tərsinin təyini, matrisin ranqının hesablanması, xüsusi və ümumi xətti tənliklər sisteminin həllinin müxtəlif üsulları nəzərdən keçirilir.

Dəyişdirilmiş Jordan əvəzetməsi (DJƏ) üsulu da xüsusi maraq kəsb edir ki, onun da hər bir addımını etmək üçün AJƏ-də verilmiş beş əməliyyatdan müəyyən qədər fərqlənən beş əməliyyatı yerinə yetirmək tələb olunur. Yadda saxlamaq lazımdır ki, bir sıra digər alqoritmlər ilə yanaşı XP məsələsinin həlli üçün tətbiq edilən Simpleks üsulu da məhz DJƏ üsuluna əsaslanır.

Təkrar üçün suallar

1. Xətti tənliklər sistemi (XTS) və onun həllinin təriflərini söyləyin.
2. Hansı çevirmələr XTS-də sadə çevirmələr adlanır?
3. Eynigüclü XTS-lər haqqında teoremi söyləyin.
4. XTS-ni həll edərkən nəticədə hansı hallar mümkündür?
5. AJƏ addımını etmək üçün hansı əməliyyatlar yerinə yetirilir?
6. «Düzbucaqlı sxemi»nin mahiyyəti nədən ibarətdir?
7. Steynis teoremini söyləyin və isbat edin.
8. Matrisin tərsinin tapılması.
9. Matrisin ranqının hesablanması.
10. Xüsusi xətti tənliklər sisteminin həlli üçün hansı üsullar vardır.?
11. Əsas (bazis) və qeyri-əsas (sərbəst) məchullar nəyə deyilir ?
12. Ümumi xətti tənliklər sisteminin həlli.
13. XTS-nin bazis həlli və XP məsələsinin dayaq həlli arasında qarşılıqlı əlaqənin mahiyyəti nədən ibarətdir?
14. XTS-nin bazis həllərinin maksimum sayı necə təyin edilir?
15. AJƏ və DJƏ üsullarının fərqi nədən ibarətdir?

Ədəbiyyat: [1, səh.7-34], [2, səh.4-27], [3, səh.47-65], [6, səh.10-26], [7, səh.55-63], [9, səh.44-51], [10, səh.525-531], [11, səh.137-155], [12, səh.49-55], [14, səh.82-90], [15, səh.59-68]

Mövzu 6. XP MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ ÜÇÜN SİMPLEKS ÜSULU

Simpleks üsulu XP məsələsinin həlli üçün universal üsul olub DJƏ üsuluna əsaslanır. Onun mahiyyəti XP məsələsinin dayaq həllərini ardıcıl olaraq yaxşılaşdırmaqla, nəhayət optimal həlli tapmaqdan ibarətdir.

Tələbə bilməlidir ki, bu zaman XP məsələsinin həlli prosesi, bütövlüklə, iki əsas mərhələdən ibarət olur:

I mərhələ – dayaq həllin axtarılması, II mərhələ – optimal həllin axtarılması.

Dayaq həllin axtarılması mərhələsi - cədvələ keçid, dayaq həllin tapılması əlaməti və əsas elementin seçilməsi altmərhələlərini özünə daxil edir.

Optimal həllin axtarılması mərhələsi isə – optimal həllin tapılması əlaməti və əsas elementin seçilməsi alt mərhələlərim əhatə edir.

Nəticədə XP məsələsinin ya məhdudiyyət şərtlərinin ziddiyyətli olması, yaxud məqsəd funksiyasının qeyri-məhdud olduğu müəyyən edilir, ya da onun optimal həlli tapılır.

Simpleks üsulunu daha dərindən mənimsəmək üçün tələbə nəinki müvafiq nəzəri əsaslara, həmçinin «max» XP məsələsinin həlli timsalında onların praktiki tətbiqi məsələlərinə də xüsusi diqqət yetirməlidir.

Bununla bərabər «min» XP məsələsinin həlli üsullarının öyrənilməsi də vacib əhəmiyyət kəsb edir. Bu məqsədlə iki üsuldan istifadə oluna bilər. Daha doğrusu, ya verilmiş «min» XP məsələsi uyğun «max» XP məsələsinə gətirilir, ya da o bilavasitə Simpleks üsulu ilə həll edilir.

Hər bir halda tələbə verilmiş XP məsələsindən asılı olaraq, onun dayaq və optimal həllərinin tapılması əlamətlərinin mövcud olub-olmamasına, əsas elementin seçilməsi prinsiplərinə mühüm əhəmiyyət verməlidir.

Təkrar üçün suallar

1. Simpleks üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
2. XP məsələsinin Simpleks üsulu ilə həlli prosesinin hansı əsas mərhələləri vardır?
3. Dayaq həllin axtarılması mərhələsi hansı alt-mərhələlərdən ibarətdir?
4. XP məsələsinin dayaq həllinin tapılması əlaməti.
5. Dayaq həlli axtararkən əsas element hansı qaydalar üzrə tapılır?
6. Hansı halda XP məslısinin şərtləri ziddiyyətlıdir?
7. Optimal həllin axtarılması mərhələsi hansı alt-mərhələlərdən ibarətdir?
8. «max» XP məsələsinin optimal həllinin tapılması əlaməti.
9. «max» XP məsələsinin optimal həllinin axtarılması zamanı əsas elementin seçilməsi qaydaları.
10. Hansı şərtlər daxilində məqsəd funksiyası yuxarıdan məhdud deyildir?
11. «min» XP məsələsinin həlli üçün hansı üsullar vardır?
12. «min» XP məsələsinin optimal həllinin tapılması əlaməti.
13. «min» XP məsələsinin optimal həllinin axtarılması zamanı əsas elementin seçilməsi qaydaları.
14. Hansı şərtlər daxilində məqsəd funksiyası aşağıdan məhdud deyildir?

Ədəbiyyat: [1, səh.35-55], [2, səh.52-92], [3, səh.66-77], [4, səh.29-57], [5, səh.214-235], [6, səh.33-72], [7, səh.64-98], [8, səh.33-55], [9, səh.51-84], [10, səh.540-560], [11, səh.156-186], [12, səh.55-66], [14, səh.91-105], [15, səh.68-85]

Mövzu 7. XP - də QOŞMALIQ

Bu mövzunun öyrənilməsi zamanı tələbə nəzərə almalıdır ki, xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin praktiki tətbiqi prosesində onun xüsusi bölməsi olan – qoşmalıq nəzəriyyəsi olduqca vacib əhəmiyyət kəsb edir. O alınmış məsələ həlli nəticələrinin hərtərəfli iqtisadi-riyazi təhlil edilməsinə və tədqiq olunan problemin həlli üzrə elmi əsaslandırılmış qərarların qəbul olunmasına imkan verir.

Tələbə bilməlidir ki, verilmiş hər bir əsas (ilkin) XP məsələsi ilə yanaşı çox hallarda digər XP məsələsinə də baxılır ki, bu da onun qoşma (birgə) məsələsi adlanır. Bu zaman əsas məsələdən qoşma məsələ müəyyən qaydalar üzrə alınır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, əsas məsələyə onun öz qoşmasının qoşma məsələsi kimi baxmaq olar. Ona görə də XP-nin əsas və qoşma məsələləri qarşılıqlı qoşma olan məsələlər cütünü təşkil edir. Onlar simmetrik və qeyri-simmetrik ola bilərlər.

Bununla əlaqədar olaraq tələbə qoşma cədvəllərin mahiyyətini bilməli, bir cüt qarşılıqlı qoşma olan XP məsələlərini vahid Simpleks cədvəlində yazmağı bacarmalıdır. Onda əsas XP məsələsini həll edərkən eyni zamanda onun qoşma XP məsələsi də həll edilir və əksinə. Bu zaman əsas XP məsələsinin həlli nəticəsində məqsəd funksiyası üçün alınmış ekstremum qiymət qoşma XP məsələsinin məqsəd funksiyasının ekstremum qiyməti ilə üst-üstə düşür.

Verilmiş mövzunun mənimsənilməsi belə nəticəyə gəlməyə imkan verir ki, bir cüt qarşılıqlı qoşma olan XP məsələləri haqqında mövcud olan əsas müddəalar qoşmalığın birinci (əsas), ikinci və üçüncü teoremlərində, həmçinin onlardan alınmış nəticələrdə öz təsdiqini tapır. Bununla əlaqədar olaraq əsas və qoşma XP məsələlərinin konkret misallar timsalında iqtisadi izahına baxılması və qoşmalıq teoremlərinin də iqtisadi mənasının qarşılıqlı müqayisə edilməsi xüsusi ilə böyük maraq kəsb edir.

Qoşma məsələnin məchulları obyektiv-şərtləşdirilmiş, yaxud qoşma qiymətlər adlanır və onlardan istifadə olunması optimal həllin iqtisadi-riyazi təhlil edilməsi üçün ən səmərəli vasitələrdən biridir. Eyni zamanda tələbə qoşma qiymətlərin əsas iqtisadi xassələrini və izahını yadda saxlamalıdır. Bunlar isə ayrı-ayrı məsələlərin baxılması və həll nəticələrinin təhlili prosesində tamamilə fərqli ola bilərlər.

Burada XP-nin qoşma məsələlərinin həlli nəticələrinin iqtisadi-riyazi təhlilinə xüsusi diqqət yetirmək lazımdır. Bu məqsədlə istehsal ehtiyatlarından optimal istifadə olunması əsas məsələsi və onun qoşma məsələsi timsalında ehtiyatların qiymətlərinin dayanıqlıq intervalları, ehtiyatların miqdarlarına nisbətən maksimum mənfəətin dəyişməsi, onların əvəzolunması normaları, ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsi və onların sabit qiymətləri nəzərə alınmaqla məhsul buraxılışının optimal planının təyini, həmçinin plana yeni məhsul buraxılışının daxil edilməsi məqsədəuyğunluğunun qiymətləndirilməsi, məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsinə nisbətən optimal həllin dayanıqlıq intervallarının müəyyən edilməsi, hazır məhsul satışından əldə olunmuş ümumi mənfəət və sərf edilmiş ehtiyatların ümumi dəyərinin müqayisəsi məsələlərini tədqiq etmək tələb olunur və s.

Əgər əsas məsələ olaraq «max» XP məsələsi götürülərsə, onda onun qoşması «min» XP məsələsindən ibarət olur. Bu zaman yuxarıda göstərdiyimiz kimi, əsas məsələni Simpleks üsulu ilə həll etdikdə ona qoşma olan məsələ də paralel surətdə həll edilir. Beləliklə, «min» XP məsələsinin həlli üçün yeni üsul alınmış olur ki, buna da qoşma Simpleks üsulu deyilir. Ona görə də tələbə «max» XP məsələsinin Simpleks üsulu ilə həlli mərhələləri ilə paralel surətdə həmçinin «min» XP məsələsinin də qoşma Simpleks üsulu ilə həlli prosesindən irəli gələn mərhələləri ifadə etməyi bacarmalıdır.

Təkrar üçün suallar

1. XP-nin qoşmalıq nəzəriyyəsinin öyrənilməsinin zəruriliyi nədən ibarətdir?
2. Hansı XP məsələləri simmetrik, qeyri-simmetrik qoşma məsələlər adlanır?
3. XP məsələsinin genişləndirilmiş matrisinin, qarşılıqlı qoşma cədvəllərin təriflərini söyləyin.
4. Simmetrik, qeyri-simmetrik qoşma XP məsələlərini tərtib etmək üçün hansı ümumi qaydalar vardır?
5. XP-nin qarşılıqlı qoşma olan bütün mümkün məsələlər cütlərini matris şəklində ifadə edin.
6. Qoşma məsələlərin asılı olmayan və asılı məchulları arasında uyğunluğun mahiyyəti nədən ibarətdir?
7. Qoşmalığın birinci (əsas) teoremi.
8. Qoşmalığın əsas bərabərsizliyi.
9. Qoşmalığın ikinci teoremini söyləyin və isbat edin.
10. Qoşmalığın üçüncü teoremi.
11. XP-nin qoşma məsələlərinin iqtisadi mənası nədən ibarətdir?
12. Qoşma məsələlərin həlli üçün hansı üsullar vardır?
13. Qoşmalığın birinci (əsas) və ikinci teoremlərinin iqtisadi mənası.
14. Həllərin iqtisadi-riyazi təhlili. Ehtiyatların obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərinin iqtisadi mənası nədən ibarətdir?
15. Ehtiyatların qiymətlərinin dayanıqlıq intervalları necə təyin edilir?
16. Ehtiyatların miqdarlarına nisbətən maksimum mənfəətin dəyişməsi. Onların əvəzolunması normalarının təyini.
17. Ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsi və onların qiymətləri nəzərə alınmaqla optimal planın dəyişməsi necə təyin edilir?
18. Plana yeni məhsul buraxılışının daxil edilməsi məqsədəuyğunluğunun qiymətləndirilməsi.
19. Məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsinə

nisbətən optimal həllin dayanıqlıq intervalları necə təyin edilir?

20. Hazır məhsul satışından əldə olunmuş ümumi mənfəət və sərf edilmiş ehtiyatların ümumi dəyərinin müqayisəsi.
21. Qoşma Simpleks üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
22. Qoşma Simpleks üsulu ilə " min " XP məsələsinin həlli prosesi hansı mərhələlərdən ibarətdir?

Ədəbiyyat: [1, səh.55-81], [2, səh.93-112], [4, səh.88-116], [5, səh.235-267], [6, səh.72-101], [7, səh.99-122], [8, səh.56-81], [9, səh.84-97], [10, səh.561-596], [11, səh.187-217], [12, səh.67-90], [14, səh.106-116]

Mövzu 8. XP - nin NƏQLİYYAT MƏSƏLƏSİ

Əvvəlki mövzularda göstərildiyi kimi iqtisadi məsələlərin çoxu müvafiq XP məsələlri şəklində ifadə edilir və onların həlli üçün Simpleks üsulunun bu və ya digər modifikasiyasından istifadə olunur. Lakin bir sıra XP məsələlərinin həlli məqsədi ilə daha səmərəli hesablama əməliyyatları tətbiq edilir ki, onlar da verilmiş məsələlərin özünəməxsus xüsusiyyətlərinə əsaslanır. Həmin məsələlərdən biri də optimallıq meyarı olaraq minimum yükdaşıma xərcləri çıxış edən nəqliyyat məsələsidir (NM).

Mövzunun öyrənilməsi zamanı tələbə ilk növbədə NM-in iqtisadi mahiyyətini mənimsəməli, onun şərtlərini cədvəl şəklində göstərməyi və müvafiq iqtisadi-riyazi modeli yazmağı bacarmalıdır. Yükdaşıma planları və nəqliyyat xərclərindən ibarət matrisləri fərqləndirməli, mümkün, dayaq və optimal planların təriflərini, həmçinin NM-nin həll edilən olması üçün zəruri və kafi şərti bilməlidir.

Tələbə qapalı və açıq NM-ləri təyin etməli, əgər açıq məsələ verilərsə, onda həmin məsələni həll etmək məqsədi ilə müvafiq qapalı məsələyə gətirməyi bacarmalı, lkin NM-in optimal yükdaşıma planının tapılmasını əsaslandırmalıdır.

NM-in məhdudiyyət şərtlərinin fərqləndirici xüsusiyyətlərinə, onun həlli üçün potensiallar və paylama üsullarından istifadə olunmasına xüsusi diqqət yetirmək lazımdır. Bu üsulların tətbiqi ilə NM-in həlli prosesi, ilkin addım və ümumi (təkrarlanan) addımdan ibarət olmaqla, iterativ xarakter daşıyır.

İlkin addım, ümumiyyətlə, NM-in ilkin dayaq planının tapılması və onun optimal olub-olmadığını yoxlamaq üçün zəruri hesablamaların aparılması mərhələlərindən ibarətdir.

Tələbə NM-in ilkin dayaq plamnı qurmaq üçün şimal-qərb bucaq, minimum dəyər, ikidəfə nəzərəalma və Fogelin approksimasiya üsullarının tətbiqi prinsiplərinin mahiyyətini və üstünlüklərini bilməli, cırlaşan və cırlaşmayan dayaq həlləri fərqləndirməyi bacarmalıdır. Əgər dayaq plan cırlaşandırsa, onda sıfır yükdaşıma həcmlərinə malik əlavə xanaların plana daxil edilməsi şərtlərini və onların əsasında zəruri praktiki hesabalamaları yerinə yetirməyi mənimsəməlidir. Burada NM-in dayaq həllinin optimallıq meyarının yoxlanması mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Əgər NM potensiallar üsulu ilə həll edilirsə, onda istehsalçı və istehlakçıların potensialları üçün müvafiq qiymətləri təyin etmək məqsədi ilə xətti tənliklər sistemi qurulur və həll edilir. Bu zaman tapılmış dayaq planın optimallıq meyarı potensiallıq şərtlərinin ödənilməsindən ibarətdir.

Əgər NM paylama üsulunu tətbiq etməklə həll edilirsə, onda hər bir dayaq həll tapıldıqdan sonra onun üçün optimallıq meyarını yoxlamaq məqsədi ilə buradakı bütün dolu olmayan xanaların qiymətləri hesablanır. Bu zaman optimallıq meyarı dayaq planda mənfi qiymətə malik dolu olmayan xananın olmamasından ibarətdir.

NM-in hər iki üsul ilə həlli prosesində ümumi (təkrarlanan) addım dayaq planın yaxşılaşdırılması və yeni alınmış planın optimal olmasının yoxlanması mərhələlərindən ibarətdir. Burada yeni dayaq plana daxil ediləcək dolu olmayan xananın təyini, müvafiq yenidən hesablama dövrünün qurulması və yenidən paylamaq üçün lazım olan yükdaşıma həcminin tapılması məsələləri xüsusi maraq kəsb edir. Tələbə bilməlidir ki, dayaq planların ardıcıl olaraq yaxşılaşdırılması, yəni ümumi addımın təkrarən tətbiqi o vaxta qədər davam etdirilir ki, NM-in optimal planı tapılmış olsun.

Təkrar üçün suallar

1. Dəyər meyarı üzrə NM-in iqtisadi mahiyyəti nədən ibarətdir?
2. NM-in iqtisadi-riyazi modelini yazın.
3. Yükdaşıma həcmləri və nəqliyyat xərclərindən ibarət matrislər nəyə deyilir?
4. NM-in mümkün, dayaq və optimal planlarının təriflərini söyləyin.
5. NM-in həlledilən olması üçün zəruri və kafi şərt haqqında teorem nədən ibarətdir?
6. Qapalı və açıq NM bir-birindən necə fərqlənir?
7. Açıq NM-in qapalı məsələyə gətirilməsi.
8. Hansı spesifik xüsusiyyətlər NM-in XP-yə daxil olan ayrıca məsələlər sinfinə aid edilməsi üçün əsas verir?
9. NM-in ilkin dayaq planının təyini üçün hansı üsullar mövcuddur?
10. Şimal-qərb bucaq üsulu (yaxud diaqonal üsulu).
11. Minimum dəyər üsulu.
12. İkidəfə nəzərəalma üsulu.
13. Fogelin approksimasiya üsulu.
14. NM-in həlli üçün potensiallar üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
15. Potensialları təyin etmək üçün hansı üsullardan istifadə edilir?
16. Potensialların iqtisadi mənası nədən ibarətdir?
17. NM-i potensiallar üsulu ilə həll etdikdə planın optimallıq meyarı nədən ibarətdir?

18. Potensiallar üsulunda dövrlərin qurulması hansı prinsiplərə əsaslanır?
19. NM-in həlli üçün paylama üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
20. Dolu olmayan xana, yaxud yenidən hesablama dövrünün qiymətinin tərifini söyləyin.
21. Dolu olmayan xananın qiymətinin iqtisadi mənası nədən ibarətdir?
22. NM-i paylama üsulu ilə həll etdikdə planın optimallıq meyarı nədən ibarətdir?
23. Dayaq planının yaxşılaşdırılması üçün yenidən hesablama dövrünün qurulması və yükdaşıma həcmlərinin yenidən paylanması hansı prinsiplərə əsaslanır?

Ədəbiyyat: [1, səh.89-110], [2, səh.113-131], [3, səh.78-94], [4, səh.134-175], [6, səh.159-204], [7, səh.123-152], [8, səh.109-135], [9, səh.106-150], [10, səh.597-637], [12, səh.90-102], [14, səh.117-141]

Mövzu 9. QEYRİ - XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA

Bu mövzunun öyrənilməsi zamanı tamədədli, parametrik, kəsr-xətti, qeyri-xətti və dinamik proqramlaşdırma məsələlərinin iqtisadi və həndəsi izahını mənimsəmək lazımdır.

Tələbə bilməlidir ki, tamədədli proqramlaşdırma məsələsinin riyazi qoyuluşunda həm məqsəd funksiyası, həm də məhdudiyyət şərtlərindəki ifadələr xətti, qeyri-xətti və qarışıq şəkildə verilə bilərlər. O yalnız məqsəd funksiyasının və məhdudiyyət şərtlərinin xətti olduğu hal ilə kifayətlənməlidir.

Bu zaman müvafiq tamədədli proqramlaşdırma məsələsinin həlli üçün xüsusi üsullar tətbiq edilə bilər. Onların mahiyyəti isə məsələnin verilmiş xətti məhdudiyyət şərtlərinə onun həllinin tamədədli olmasını tə'min edən əlavə məhdudiyyətlərin seçilməsindən ibarətdir.

Sonlu sayda addımlardan sonra məsələnin tamədədli həllini tapmağa imkan verən üsullardan ən əlverişlisi R.E.Qomori tərəfindən təklif edilmişdir.

Tələbə həmçinin məqsəd funksiyasının və məhdudiyyət şərtlərinin əmsallarının, sərbəst həddlərin hər hansı parametrdən asılı olduğu ayrı-ayrı hallarda və ümumi halda parametrik proqramlaşdırma məsələlərini yazmağı bacarmalı, hər bir halda optimal həllin axtarılmasının mə‘nasını başa düşməlidir.

Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin riyazi qoyuluşu və spesifik xüsusiyyətləri, iqtisadi və həndəsi izahı, müvafiq XP məsələsinə gətirilməsi və məsələnin mərhələli həlli prosesi də xüsusi maraq kəsb edir.

Qeyri-xətti proqramlaşdırmanın ümumi məsələsinin xüsusi halına da diqqət yetirmək lazımdır. Burada məhdudiyyət şərtlərinin yalnız tənliklərdən ibarət oluduğu, mənfi məchulların olmadığı, məqsəd funksiyasının və məhdudiyyətlər sisteminə daxil olan funksiyaların isə öz xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməz olduğu fərz edilir. Belə məsələyə riyazi analiz fənnində şərti ekstremum məsələ yaxud klassik optimallaşdırma məsələsi deyilir.

Tələbə qeyri-xətti proqramlaşdırmanın müvafiq məsələlərinin həlli məqsədi ilə tətbiq edilən Laqranj vuruqları üsulunu mənimsəməlidir ki, burada da məsələnin optimal həllinin axtarılması mərhələli prosesdən ibarət olur.

Dinamik proqramlaşdırma məsələlərini öyrənərkən tələbə bilməlidir ki, xətti və digər qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələlərindən fərqli olaraq, onlar çoxmərhələli yaxud çoxaddımlıdırlar. Başqa sözlə desək, verilmiş dinamik proqramlaşdırma məsələsinin optimal həllinin tapılması bir neçə mərhələdən yaxud addımdan ibarət olur. Bu zaman hər bir mərhələdə (addımda) ilkin məsələ ilə şərtləşdirilən, müəyyən xüsusi məsələnin optimal həlli tə‘yin edilir.

Burada xüsusi olaraq optimal idarəetmə strategiyasının mahiyyətinə diqqət vermək lazımdır ki, o da özündə sistemin trayektoriyasının optimal idarəedilməsi məcmusunu əks etdirir.

Mövzunun öyrənilməsində həmçinin Bellmanın optimallıq prinsipi və onun riyazi ifadəsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir ki, buna da Bellmanın əsas funksional tənliyi yaxud rekurrent münasibət deyilir.

Təkrar üçün suallar

1. Tamədədli proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi və həndəsi izahı.
2. Tamədədli proqramlaşdırma məsələsinin həlli üçün hansı üsullar mövcuddur?
3. Parametrik proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi və həndəsi izahı.
4. Parametrik proqramlaşdırma məsələsinin müxtəlif hallarda yazılışı.
5. Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi və həndəsi izahı.
6. Onun müvafiq XP məsələsinə gətirilməsi və mərhələli həlli prosesi.
7. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi və həndəsi izahı.
8. Laqranj vuruqları üsulunun ümumi mahiyyəti nədən ibarətdir?
9. Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsinin Laqranj vuruqları üsulu ilə həlli prosesi hansı mərhələləri əhatə edir?
10. Dinamik proqramlaşdırma məsələsinin iqtisadi və həndəsi izahı.
11. Həllin qəbul edilməsinin çoxmərhələli yaxud çoxaddımlı prosesinin mahiyyəti nədən ibarətdir?
12. Bellmanın optimallıq prinsipi necə ifadə edilir?
13. Bellmanın əsas funksional tənliyi yaxud rekurrent münasibət nəyə deyilir?

Ədəbiyyat: [1, səh.110-133], [3, səh.95-99], [4, səh.175-224, 251-261, 292-311], [7, səh.102-120,153-172], [8, səh.82-108], [9, səh.97-105, 150-162,163-171, , 231-238, 248-255], [11, səh.115-127], [12, səh.120-130]

Mövzu 1. RİYAZİ PROQRAMLAŞDIRMANIN ƏSAS ANLAYIŞLARI

1.1. Riyazi proqramlaşdırmanın obyekti, predmeti və məqsədi

Məlum olduğu kimi planlı iqtisadiyyatın həm mikro-, həm də makro- səviyyələrində yuxarı idarəetmə orqanları tərəfindən alınmış plan tapşırıqlarının yerinə yetirilməsi başlıca məqsəd kimi qarşıya qoyulur və buna görə də adətən seçim olmur. Bazar iqtisadiyyatı şəraitində isə əsas problemlərdən biri səmərəli seçim problemidir. Belə ki, burada fəaliyyət göstərən hər bir sosial-iqtisadi sistem, təsərrüfat vahidi müstəqil olaraq qərar, yaxud seçim qəbul edə bilər. Bununla əlaqədar olaraq lazımi riyazi hesablamaların aparılması və bu münasibətlə müasir kompüter texnikasından istifadə olunması obyektiv zəruriyyət təşkil edir. Məhz buna görə də sosial-iqtisadi sistemlərin və proseslərin səmərəli fəaliyyəti üçün elmi və praktiki nöqteyi-nəzərdən əsaslandırılmış idarəetmə qərarlarının işlənib hazırlanmasında riyazi üsullardan istifadə xüsusilə vacib əhəmiyyət kəsb edir.

Ümumiyyətlə, hər bir elm sahəsi yalnız və yalnız o vaxt özünün ən inkişaf etmiş zirvəsinə çatar ki, o riyaziyyatdan istifadə etmiş olsun. Müasir iqtisad elminin inkişafı da riyaziyyatın geniş tətbiqi ilə səciyyələnir. Riyazi üsullar və modellər iqtisadi nəzəriyyə də daxil olmaqla istənilən iqtisad elminin üsulları və vasitələri məcmusunun tərkib hissəsi kimi çıxış edirlər. Əsaslı iqtisadi təhlil ilə birlikdə riyazi üsullar və modellərdən istifadə olunması iqtisad elmi və praktika üçün yeni imkanlar yaradır. Onlardan iqtisadiyyatda istifadə olunması əvvəla iqtisadi kəmiyyətlər və obyektlər arasında daha vacib, nəzərə çarpacaq əlaqələri aşkar edib onları ifadə etməyə imkan verir. Bu müvafiq mürəkkəb problemlərin yüksək dərəcədə mücərrəd olması ilə əlaqədardır. İkincisi, nəzərdə tutulmuş şərtlər daxilində dəqiq ifadə olunmuş zəruri ilkin məlumatlar və münasibətlərdən deduksiya üsulları ilə tədqiq edilən obyektə uyğun nəticələri almaq mümkündür.

Üçüncüsü, riyazi üsullar və modellər induksiya üsulu ilə obyekt haqqında yeni biliklər əldə etməyə imkan verir, onun fəaliyyət prosesində, aparılmış müşahidələrə daha yüksək dərəcədə uyğun olmaqla, mövcud amillər arasındakı asılılıq formalarını təyin etmək və müəyyənedici parametrləri qiymətləndirmə vasitəsi kimi çıxış edirlər. Nəhayət, dördüncüsü, riyazi üsullar və modellərdən istifadə olunması iqtisadi nəzəriyyənin müddəalarını, anlayışlarını və nəticələrini daha dəqiq və yığcam şəkildə ifadə etməyə əsas verir.

Hal-hazırda riyazi üsulların köməkliyi ilə müxtəlif xarakterli iqtisadi problemlərin qoyuluş və həlli üzrə artıq kifayət qədər təcrübə əldə edilmişdir. Bununla bərabər sosial-iqtisadi sistemlərin və proseslərin optimal planlaşdırılması və idarə edilməsi məsələlərinin tədqiqi, onların həlli üsulları və prinsiplərinin işlənilməsi və ardıcıl surətdə təkmilləşdirilməsi xüsusilə böyük müvəffəqiyyətlə davam etdirilir. Bütün bunlar isə iqtisadi tədqiqatlarda riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin tətbiqinin mahiyyətini təşkil edir.

Riyazi proqramlaşdırma tətbiqi riyaziyyat elminin əsas bölmələrindən biri olmaqla, onun öyrənmə ***obyektini*** mürəkkəb sistem və proseslərin optimal planlaşdırılması və idarə edilməsi üzrə ekstremum məsələlər təşkil edir.

Fənnin ***predmeti*** olaraq ekstremum məsələlərin tədqiqi, burada istifadə edilən kəmiyyətlər arasında riyazi asılılıqların müəyyən olunması, müvafiq modellərin qurulması, onların əsasında məsələ həlli üçün ən əlverişli üsul və prinsiplərin təyini çıxış edir.

Riyazi proqramlaşdırmanın öyrənilməsindən ***məqsəd*** isə ekstremum məsələlərin həlli üçün riyazi üsulları və EHM-in imkanlarını ardıcıl tətbiq etməkdən, alınmış nəticələrin hərtərəfli təhlilini aparmaqdan, optimal qərarların işlənməsi və qəbul edilməsindən, onların praktiki tətbiqinin səmərəliliyinin əsaslandırılmasından ibarətdir.

Tərif 1.1. Riyazi proqramlaşdırmanın ümumi məsələsi müəyyən şərtlər daxilində hər hansı funksiyanın ektsremum,

yəni maksimum («max») və yaxud minimum («min») qiymətinin təyini məsələsinə deyilir və riyazi şəkildə aşağıdakı kimi ifadə edilir:

Məqsəd funksiyası

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min); \qquad (1.1)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i, \qquad (i = \overline{1,k}), \qquad (1.2)$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le a_i, \qquad (i = \overline{k+1,m}), \qquad (1.3)$$

məchulların işarələri üzrə şərtlər

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,s};\ s \le n) \qquad (1.4)$$

Yazılışdan göründüyü kimi, ekstremum məsələnin riyazi şəkildə qoyuluşu, ümumiyyətlə, ***üç əsas hissədən ibarətdir:***

I. (1.1) məqsəd funksiyası (yaxud optimallıq meyarı) adlanır və onun üçün ekstremum qiymət axtarılır.

II. Məhdudiyyət şərtləri (1.2) bərabərlikləri yaxud tənlikləri və (1.3) bərabərsizliklərindən ibarətdir.

III. Məsələyə daxil olan məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş (1.4) şərtləri.

Qeyd edək ki, bəzi ədəbiyyatlarda (1.2) və (1.3) şərtləri riyazi proqramlaşdırma məsələsinin həmçinin ***funksional***, (1.4) şərtləri isə – ***birbaşa məhdudiyyətlər*** adlanır.

Bununla bərabər (1.4) şərtləri çox vaxt II hissəyə aid edilir.

Tərif 1.2. (1.2) - (1.4) şərtlərini ödəyən $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***vektoruna riyazi proqramlaşdırmanın (1.1) - (1.4) ümumi məsələsinin mümkün həlli (planı) deyilir.***

Qeyd 1. «Həll» və ***«plan»*** terminləri sinonimdirlər. Verilmiş məsələnin riyazi nöqteyi-nəzərdən həlli haqqında söhbət getdikdə adətən birinci, onun iqtisadi mahiyyətinin izahı prosesində isə ikinci anlayışdan istifadə olunur.

Tərif 1.3. (1.1) məqsəd funksiyasına ekstremum qiymət verən mümkün həllə (1.1) - (1.4) riyazi proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli deyilir.

(1) - (1.4) riyazi proqramlaşdırma məsələsini həll etməkdən məqsəd onun optimal həllini tapmaqdan ibarətdir.

$f\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ və $g_i\ (x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalarının xassələri, ekstremum məsələlərin həlli qarşısında qoyulmuş məqsədlərdən asılı olaraq riyazi proqramlaşdırma bir sıra müstəqil fənlərə bölünür.

Hər bir fənn isə planlaşdırma və idarəetmənin müəyyən məsələlər məcmusunun öyrənilməsi və tədqiqi, onların praktiki həlli üsullarının işlənməsi və prinsiplərinin əsaslandırılması ilə məşğul olur.

Riyazi proqramlaşdırma məsələləri ilk növbədə xətti və qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələlərinə bölünür. Əgər məqsəd funksiyası və bütün məhdudiyyət şərtləri $x_1, x_2, ..., x_n$ məchullarının hamısına nəzərən xətti olarsa, onda verilmiş məsələ ***xətti proqramlaşdırma***, əks halda isə – ***qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsi*** olur.

Qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələləri içərisində daha dərindən olmaqla **qabarıq proqramlaşdırma məsələləri** öyrənilmişdir. Bu məsələlərin həlli nəticəsində məhdud qabarıq çoxluqda təyin edilmiş çökük funksiya üçün minimum, yaxud qabarıq funksiya üçün maksimum qiymət axtarılır.

Qabarıq proqramlaşdırma məsələləri içərisində isə, öz növbəsində, daha ətraflı olmaqla **kvadratik proqramlaşdırma məsələləri** tədqiq edilmişdir. Bu kimi məsələlərdə isə, ümumiyyətlə, xətti tənliklər, yaxud xətti bərabərsizliklərdən, ya da həm xətti tənliklər, həm də xətti bərabərsizliklərdən ibarət məhdudiyyət şərtləri ödənilməklə kvadratik funksiya üçün maksimum və ya minimum qiymətin tapılması tələb olunur.

Riyazi proqramlaşdırmanın digər inkişaf istiqamətlərinə misal olaraq tamədədli, parametrik və kəsr-xətti proqramlaşdırmanı göstərmək olar.

Tamədədli proqramlaşdırma məsələlərində məchullar yalnız və yalnız tam ədədlərdən ibarət qiymətlər ala bilərlər.

Parametrik proqramlaşdırma məsələlərində məqsəd funksiyası, yaxud məchulların mümkün dəyişmə oblastını təyin edən şərtlər, ya da həm məqsəd funksiyası, həm də məhdudiyyət şərtləri müəyyən parametrlərdən asılı olurlar.

Kəsr-xətti proqramlaşdırma məsələlərində məqsəd funksiyası iki xətti funksiyanın nisbəti şəklində verilməklə, məchulların mümkün dəyişmə oblastını müəyyən edən şərtlər də həmçinin xətti olurlar.

Bundan başqa riyazi proqramlaşdırmanın stoxastik və dinamik proqramlaşdırma nəzəriyyələri kimi daha iki bölmələri də mövcuddur.

Əgər məqsəd funksiyasında, yaxud məchulların mümkün dəyişmə oblastını təyin edən şərtlərdə təsadüfi kəmiyyətlər olarsa, onda belə məsələyə **stoxastik proqramlaşdırma məsələsi** deyilir.

Riyazi proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşunda zaman amilindən asılılıq olarsa, yaxud həlli prosesi çoxmərhələli, çoxaddımlı olarsa, ona **dinamik proqramlaşdırma məsələsi** deyilir.

Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsi əsasən XX əsrin 30-cu illərindən başlayaraq inkişaf etməyə başlamışdır. 1931-ci ildə macar riyaziyyatçısı B.Egervari «seçmə problemi» adlanan riyazi proqramlaşdırma məsələsinin riyazi qoyuluşuna baxmış və onu həll etmişdir. Sonralar bu həll üsulu müvafiq olaraq «macar üsulu» adını almışdır.

1939-cu ildə rusiyalı alim L.V.Kantoroviç xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli üçün «həlledici vuruqlar» üsulunu işləyib hazırlamışdır. O, M.K.Qavurinlə birlikdə 1949-cu ildə nəqliyyat məsələsinin həlli üçün «potensiallar üsulu»nu işləmişlər. L.V.Kantoroviç, V.S.Nemçinov, D.B.Yudin, Y.Q.Qolşteyn və s. kimi riyaziyyatçılar və iqtisadçıların elmi-tədqiqat işlərində həm riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin inkişafı ardıcıl surətdə davam etdirilmiş, həm də onun müxtəlif iqtisadi problemlərin həllində tətbiqi üsulları və prinsipləri araşdırılmış və təkmilləşdirilmişdir.

Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin inkişafında amerikan alimlərinin xüsusilə böyük xidmətləri olmuşdur.

1941-ci ildə Xiçkok ilk dəfə nəqliyyat məsələsinin qoyuluşunu vermişdir. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli üçün universal üsul 1949-cu ildə C.Dansiq tərəfindən çap olunmuş və «simpleks üsulu» adını almışdır. Xətti və qeyri-xətti proqramlaşdırma üsullarının sonrakı inkişafı Ford, Falkerson, Kun, Qass və s. alimlərin işlərində öz əksini tapmışdır. 1951-ci ildə Kun və Takkerin çap olunmuş işində qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həllinin optimal olması üçün zəruri və kafi şərtlər gətirilmişdir. Dennis, Rozen və Zoytendeykin tədqiqatlarında qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üçün qradiyent üsulları işlənmişdir.

Müstəqil nəzəriyyə olmaqla dinamik proqramlaşdırma XX əsrin 50-ci illərində formalaşmışdır. R.Bellmanın müvafiq elm sahəsindəki tədqiqatları xüsusilə vacib maraq kəsb edir. Müasir dövrdə dinamik proqramlaşdırma əsasən müxtəlif xarakterli çoxmərhələli proseslərin optimal idarə edilməsi məqsədi ilə zəruri üsul və prinsiplərin praktiki tətbiqi istiqamətində inkişaf etdirilir.

Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsi, iqtisadi – riyazi modelləşdirmə üsulları və prinsiplərindən istifadə etməklə sosial - iqtisadi sistem və proseslərin optimal idarə edilməsi problemlərinin tədqiqi ilə Azərbaycan respublikasında müxtəlif elmi – tədqiqat institutları, mərkəzləri, iqtisadçı və riyaziyyatçı alimlərdən ibarət kollektivlər məşğul olurlar.

70 – ci illərdən etibarən müvafiq sahədə tədqiqatların aparılması və elmi – əsaslandırılmış idarəetmə qərarlarının işlənib hazırlanması, onların praktikada tətbiqi və alınmış nəticələrin səmərəliliyinin təhlili həmçinin Az.DİU – da müvəffəqiyyətlə və müntəzəm surətdə davam etdirilir. Burada "İqtisadi kibernetika və İRÜ " kafedrasının müdiri i.e.d., professor B.S Musayevin rəhbərliyi altıında tədris prosesinin təkmilləşdirilməsi və elmi–tədqiqat işləri üzrə yerinə yetirilmiş araşdırmalar xüsusi ilə böyük maraq kəsb edir.

Qeyd edək ki, sosial-iqtisadi sistem və proseslərin optimal idarə edilməsi problemlərini tədqiq edərkən çox hallarda qeyri - xətti proqramlaşdırma məsələləri alınır. Bu məsələlər isə adətən müvafiq xətti proqramlaşdırma məsələləri ilə approksimasiya (əvəz) olunur. Belə ki, xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli üçün daha çox sayda səmərəli üsullar, alqoritmlər və EHM-də standart proqramlar işlənmişdir.

1.2. «Model» və «modelləşdirmə» anlayışları. Modelləşdirmə prosesinin mahiyyəti

Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin mənimsənilməsi prosesində «model» və «modelləşdirmə» anlayışına tez-tez rast gəlinir. Buna görə də onların mahiyyətini və qarşılıqlı əlaqələrini bilmək vacibdir.

«Model» anlayışı insan fəaliyyətinin müxtəlif sahələrində geniş istifadə olunur və onun ədəbiyyatda çox sayda tərifləri vardır ki, bunlar da bir-birindən fərqlənirlər. Bununla belə «model» anlayışı müəyyən mənada hər kəsə tanışdır: məsələn, oyuncaq təyyarə, kağız göyərçin – təyyarənin modelidir. Mənzərənin fotosurəti, coğrafi xəritə – yerin hər hansı hissəsinin, qlobus isə – bütövlüklə Yer planetinin modelidir. Orta məktəb fənlərindən məlum olan $S = v \cdot t$ - məsafə düsturunun məhz riyazi model olması yəqin ki, çoxları üçün yenilikdir. Qeyd edək ki, biz yalnız elə modelləri nəzərdən keçirəcəyik ki, onların vasitəsilə müəyyən biliklər əldə etmək mümkün olsun.

Mövcud ədəbiyyatla tanış olduqdan sonra «model» və «modelləşdirmə» anlayışları üçün aşağıdakı müvafiq tərifləri söyləmək daha məqsədəuyğundur.

Tərif 1.1. Model dedikdə obyekt - orijinalın öyrənilməsi prosesində onu maddi olaraq və yaxud fikrən əvəz edən elə bir digər obyekt təsəvvür edilir ki, bunun bilavasitə öyrənilməsi obyekt - orijinal haqqında yeni biliklər əldə etməyə imkan verir.

Tərif 1.2. Obyekt - orijinalın tədqiqi, onun modelinin qurulması, model əsasında məsələ həlli və alınmış nəticələrin praktikada tətbiqi prosesinə modelləşdirmə deyilir.

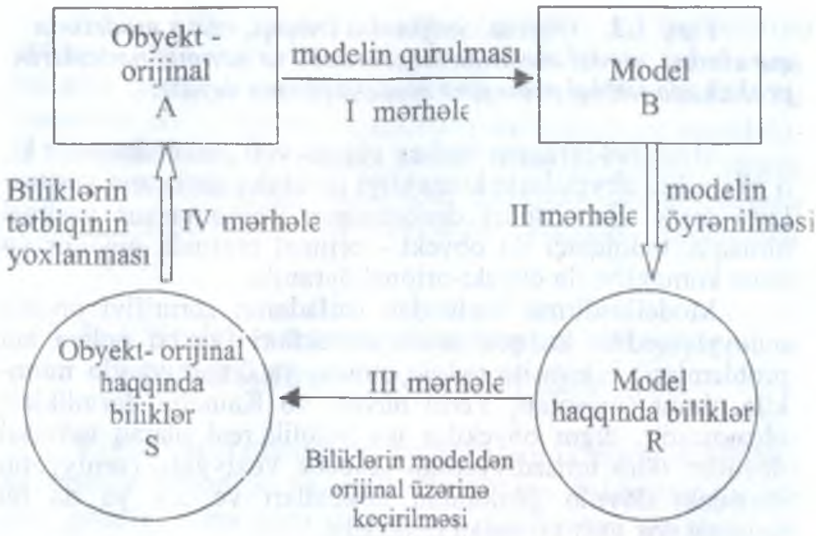
Modelləşdirmənin başlıca xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, o əvəzedici obyektlərin köməkliyi ilə aralıq dərketmə vasitəsi kimi çıxış edir. Model dərketmənin özünəməxsus vasitəsi olmaqla, tədqiqatçı ilə obyekt - orijinal arasında qoyulur və onun köməkliyi ilə obyekt-orijinal öyrənilir.

Modelləşdirmə üsulundan istifadənin zəruriliyi onunla müəyyən edilir ki, çox sayda obyektləri (yaxud onlara aid problemləri) bilavasitə tədqiq etmək, ya ümumiyyətlə mümkün olmur (məsələn, Yerin nüvəsi və Kainatın dərinlikləri əlçatmazdır, digər obyektlər isə hələlik real olaraq mövcud deyildir: ölkə iqtisadiyyatının gələcək vəziyyəti, cəmiyyətin qarşıdakı dövrdə gözlənilən tələbatları və s.), ya da bu tədqiqat çox vaxt və vəsait tələb edir.

Modelləşdirmə prosesinə aşağıdakı üç tərkib element daxildir: 1) tədqiqat obyekti; 2) subyekt (tədqiqatçı); 3) model, yəni subyekt və dərk edilən obyekt arasındakı münasibətləri ifadə edən vasitə. Modelləşdirmə prosesi dörd əsas mərhələdən ibarətdir və onun mahiyyətini izah etmək üçün şəkil 1.1 - dən istifadə edək.

Tutaq ki, hər hansı A obyekt - orijinalı verilmişdir və onun modelləşdirmə üsulu ilə tədqiq edilməsi tələb olunur.

I mərhələdə verilmiş A obyekt - orijinalının (maddi olaraq, yaxud fikrən) modeli qurulur, ya da real həyatda onu əvəz edən digər obyekt tapılır və o şərti olaraq B ilə işarə edilir. Şübhəsiz ki, modelin qurulması mərhələsi obyekt – orijinal haqqında müəyyən biliklərin olmasını tələb edir. Modelin dərkedilmə imkanları onunla müəyyən edilir ki, o obyekt – orijinalın yalnız bəzi vacib cəhətlərini əks etdirir. Aydındır ki, model həm orijinal ilə tam üst - üstə düşən halda (onda o artıq model olmur), həm də orijinaldan bütün ən mühüm cəhətlərə nəzərən həddindən çox fərqləndiyi halda öz mənasını itirir.



Şəkil 1.1. Modelləşdirmə prosesinin mərhələləri

Beləliklə, istənilən model orijinalı yalnız ciddi məhdud mənada əvəz edir. Buradan belə nəticəyə gəlirik ki, bir obyekt – orijinal üçün bir neçə model qurmaq olar. Onlardan hər biri obyekt – orijinalın müəyyən tərəflərini əks etdirir, yaxud onun fəaliyyətini təyin edən amilləri müxtəlif dərəcədən xarakterizə edir.

Modelləşdirmə prosesinin **II mərhələsində** B modelinin özü müstəqil tədqiqat obyekti kimi çıxış edir. Məsələn, belə tədqiqat formalarından biri model üzrə sınaqların aparılmasından ibarətdir. Burada B modelindən istifadə şərtləri məqsədyönlü şəkildə dəyişdirilir və onun davranışı haqqında alınmış məlumatlar sistemləşdirilir. Bu mərhələnin nəticəsində B modeli haqqında A obyekt – orijinalının qurulmuş modeldə əks etdirilən mühüm cəhətlərinə nəzərən, R biliklər məcmusu formalaşır.

III mərhələdə model haqqında alınmış R biliklərindən obyekt – orijinal haqqında olan müvafiq biliklərə keçilir.

Nəticədə orijinal haqqında S biliklər məcmusu formalaşır və bununla da model dilindən orijinal dilinə keçid yerinə yetirilir. Hər hansı nəticənin modeldən orijinal üzərinə keçirilməsi o halda mümkündür ki, bunun üçün kifayət qədər əsas olsun. Daha doğrusu, nəticə orijmal və modelin bir-birinə kifayət qədər uyğun, adekvat olmasına xidmət etməlidir.

IV mərhələdə isə əldə edilmiş S biliklərinin praktiki yoxlanması yerinə yetirilir və onlardan obyekt – orijinalın məqsədəuyğun fəaliyyətini, yaxud optimal idarə edilməsini təmin etmək, onun ümumiləşdirilmiş nəzəriyyəsini frmalaşdırmaq məqsədi ilə istifadə imkanları araşdırılır.

Nəticədə aşağıdakı iki haldan biri alına bilər:

I hal. Alınmış S biliklərinin praktiki olaraq tətbiqi A obyekt – orijinalının optimal fəaliyyətini təmin etməyə imkan verir. Onda B modeli A obyektinə adekvat olur, yəni ona kifayət qədər yaxşı uyğundur və bununla da modelləşdirmə prosesi qurtarır. Qeyd edək ki, yuxarıda göstərilən I, II, III və IV mərhələlər birlikdə bir **dövr** təşkil edir. Beləliklə, I halda modelləşdirmə prosesi yalnız bir dövrdən ibarət olur.

II hal. Alınmış S biliklərinin praktiki yoxlanması belə nəticəyə gəlməyə imkan verir ki, onlardan istifadə olunması A obyekt – orijinalının optimal fəaliyyətini təmin etmir. Onda B modeli A obyektinə adekvat deyildir və o təkmilləşdirilməlidir. Deməli, modelləşdirmə prosesi davam etdirilməlidir və bunun üçün ikinci dövrü başlamaq lazımdır. Burada I mərhələdə obyekt – orijinal haqqında olan biliklər genişləndirilir və dəqiqləşdirilir. Yeni amillərin və mühüm xüsusiyyətlərin nəzərə alınması ilə B modeli ilə müqayisədə daha yaxşı olan B' modeli qurulur. Yerdə qalan II, III və IV mərhələlər də yuxarıda göstərilmiş oxşar qayda ilə həyata keçirilir və bununla da ikinci dövr yerinə yetirilir.

Beləliklə, alırıq ki, **modelləşdirmə dövrü prosesdir.** Bu o deməkdir ki, birinci dövrdən sonra, əgər lazım gələrsə, ikinci, üçüncü və s. dövrlər davam edə bilər. Dövrlərin ardıcıl olaraq tətbiqi o vaxta qədər davam etdirilir ki, I hal alınmış olsun. Bu zaman birinci dövrdən sonra, tədqiq edilən obyekt -

orijinal haqqında kifayət qədər biliklərin olmaması və müvafiq modelin qurulması prosesində buraxılmış səhvlər ilə şərtləşdirilən, aşkar edilmiş çatışmazlıqlar sonrakı dövrlərdə aradan qaldırılır. Daha doğrusu, modelləşdirmə metodologiyası böyük özünütəkmilləşdirmə imkanlarına malikdir.

1.3. İqtisadi – riyazi modelləşdirmənin mərhələləri

İqtisadi – riyazi modelləşdirmə prosesinin tədqiqinə keçməmişdən əvvəl iqtisadi – riyazi model anlayışının mahiyyətini və tərifmi, həmçinin onun qurulması prosesini nəzərdən keçirək.

Tərif 1.4 - ə əsasən model altında, başqa sözlə desək, obyekt – orijinalın şərti obrazı başa düşülür ki, bu da müəyyən dilin köməkliyi ilə verilmiş obyekti təxmini əvəz edir. İqtisadi – riyazi modellər üçün belə obyekt – orijinallar olaraq sosial – iqtisadi sistemlər, obyektlər və proseslər çıxış edir. Məsələn, əhalinin həyat səviyyəsinin proqnozlaşdırılması, müəssisədə xammal, material, əmək və maliyyə ehtiyatlarından istifadə, müxtəlif növ avadanlıqlar arasında məmulatların istehsal planlarının bölüşdürülməsi, istehsalçılardan yüklərin istehlakçılara daşınması və s. kimi problemləri bu obyektlərə aid etmək olar. Bu zaman obyekt – orijinalları əvəz etmək üçün dil olaraq klassik və xüsusi işlənmiş riyazi münasibətlər çıxış edirlər ki, onlar da müəyyən funksiya, bərabərlik və bərabərsizlik şəklində verilmiş şərtlər, həmçinin onların formalaşdırılması prinsiplərindən ibarətdir.

Tərif 1.6. Sosial – iqtisadi obyekt, yaxud prosesin riyazi yazılışına iqtisadi – riyazi model deyilir.

Beləliklə, iqtisadi – riyazi model sosial – iqtisadi obyekt, yaxud prosesin mahiyyəti və fəaliyyəti qanunauyğunluqlarını riyazi münasibətlərin köməkliyi ilə abstrakt şəkildə ifadə edir. İqtisadiyyatda riyaziyyat elminin tətbiqi daha dərin və keyfiyyətli iqtisadi – riyazi təhlil aparmağa imkan verir, iqtisadi informasiya sahəsini genişləndirir və zəruri iqtisadi hesablamaların yerinə yetirilməsi prosesini intensivləşdirir.

Burada qoyulmuş məsələnin həlli üçün müvafiq iqtisadi – riyazi modelin qurulması prosesi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. O, aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir:

I. Modeldə qiymətləri tapılacaq zəruri kəmiyyətlərin təyin edilməsi, yəni verilmiş iqtisadi məsələnin məchullarının müəyyənləşdirilməsi.
II. Məsələ həllində əsas məqsədin iqtisadi mahiyyətinin müəyyən olunması, onun üçün ekstremum, yəni maksimum («max») və ya minimum («min») qiymətin axtarılması məqsədi ilə müvafiq funksiya (optimallıq meyarı) şəklində ifadə edilməsi.
III. Verilmiş məsələnin iqtisadi qoyuluşunun xarakterindən asılı olaraq, onun bərabərlik və bərabərsizliklər şəklində məhdudiyyət şərtlərinin formalaşması.
IV. Məchulların mənfi olmaması şərtlərinin əsaslandırılması.
V. Məsələnin iqtisadi-riyazi modelinin yazılışı.

İndi isə sosial-iqtisadi obyekt, yaxud prosesin bilavasitə iqtisadi-riyazi modelləşdirilməsi prosesinin mahiyyətinin aydınlaşdırılmasına keçək. Modelləşdirmənin bu növü həm modelləşdirmə obyekti, həm də modelləşdirmə üsulu və vsitəsi ilə əlaqədar olan bir sıra özünəməxsus xüsusiyyətlərə malikdir. Buna görə də iqtisadi-riyazi modelləşdirmənin bütün mərhələləri ardıcıllığını və onların mahiyyətini daha ətraflı təhlil etmək məqsədəuyğundur. Bu münasibətlə iqtisadi-riyazi modelləşdirmənin bir dövrünün ibarət olduğu altı mərhələni ayırmaq lazımdır: iqtisadi problemin qoyuluşu və onun keyfiyyət təhlili; iqtisadi-riyazi modelin qurulması; modelin riyazi təhlili; ilkin məlumatın hazırlanması; ədədi həll; həll nəticələrinin iqtisadi-riyazi təhlili və onların tətbiqi. Mərhələlərdən (1,2,3,4,5,6) hər birinin mahiyyətini daha ətraflı nəzərdən keçirək. Lakin elə hal da mümkün ola bilər ki, problemin formalaşdırılması əvvəllər məlum olmayan riyazi qoyuluşun alınmasına səbəb olsun.

1.İqtisadi problemin qoyuluşu və onun keyfiyyət təhlili. Bu mərhələdə verilmiş iqtisadi problemin mahiyyətlni, qəbul edilən ilkin şərtləri və fərziyyələri formalaşdırmaq lazımdır. Burada modelləşdirilən obyekt-orijinalın əsas xüsusiyyətlərini və xassələrini ayırmaq, onun quruluşunu və tərkib elementlərinin qarşılıqlı əlamətlərini öyrənmək, tədqiq olunan obyektin davranışını və inkişafını izah edən hipotezalardan heç olmazsa birinin əvvəlcədən formalaşdırılması tələb edilir.

2. İqtisadi-riyazi modelin qurulması. Burada verilmiş iqtisadi problem dəqiq riyazi asılılıqlar və münasibətlər (funksiyalar, tənliklər, bərabərsizliklər və s.) şəklində ifadə edilir. İqtisadi-riyazi modelin qurulması prosesinin mərhələləri yuxarıda göstərilmişdir. Qeyd edək ki, bir sıra hallarda bəzi mürəkkəb tədqiqat obyektləri üçün fərdi cəhətlərə malik bir neçə modelin qurulması məqsədəuyğun olur. Bununla bərabər hər bir modeldə obyektin yalnız bəzi tərəflərinin dəqiq ifadəsinin verilməsinə baxmayaraq, onun digər tərəfləri ümumiləşdirilmiş və təxmini olmaqla nəzərə alınır.

İqtisadi-riyazi modellərin mühüm xüsusiyyətlərindən biri də onların müxtəlif xarakterli problemlərin həlli üçün potensial imkana malik olmasıdır. Buna görə də, hətta yeni iqtisadi problem ilə qarşılaşdıqda belə, yeni model «kəşf» etmək üçün çalışmaq lazım deyildir. Problemin həlli məqsədi ilə ilk növbədə daha yaxşı öyrənilmiş riyazi məsələlər sinfinə aid olan modeli tətbiq etməyə çalışmaq lazımdır. Bu modelləşdirilən obyektin əsas cəhətlərinə təsir etməyən, lakin müvafiq modelin qurulmasında istifadə olunan ilkin şərtlərin müəyyən mənada sadələşdirilməsini də tələb edə bilər. Lakin elə hal da ola bilər ki, problemin formalaşdırılması zamanı əvvəllər məlum olmayan riyazi qoyuluş alınsın.

3. Modelin riyazi təhlili. Burada xalis riyazi tədqiqat üsulları ilə modelin və onun əsasında məsələ həlli nəticələrinin ümumi xassələri aşkar edilir. Xüsusilə, formalaşdırılmış məsələnin həllinin mövcud olmasının isbat edilməsi vacib əhəmiyyətə malikdir. Analitik tədqiqat aparmaqla məsələnin həllinin yeganə olub-olmadığı, həllə hansı məchulların daxil olduğu, onların dəyişmə intervalları və ənənələri və s. aydınlaşdırılır. Empirik (ədədi) tədqiqat ilə müqayisədə analitik tədqiqat həmçinin bu üstünlüyə malikdir ki, onun vasitəsilə alınmış nəticələr modelin xarici və daxili parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində də öz gücünü saxlayır. Bununla bərabər mürəkkəb iqtisadi problemlərin modelləri çox çətinliklə analitik tədqiqata məruz qalırlar. Bu kimi hallarda onların tədqiq edilməsi ədədi üsullarla aparılır.

4. İlkin məlumatların hazırlanması. İqtisadi problemlərin modelləşdirilməsi prosesində bu mərhələ, adətən, olduqca mühüm və əməktutumludur. Belə ki, məqsəd yalnız passiv olmaqla məlumatları yığmaqdan ibarət olmayıb, həm elmi, həm də praktiki nöqteyi-nəzərdən əsaslandırılmış zəruri məlumatları hazırlamaqdan ibarətdir. Ümumiyyətlə informasiya sistemi üzərinə modelləşdirmə çox ciddi tələblər qoyur. Bununla bərabər nəinki tələb olunan keyfiyyətdə məlumatların hazırlanması üçün prinsipial imkanlar, həmçinin müvafiq məlumatlar massivi ilə əlaqədar xərclərə də diqqət yetirmək lazımdır. Lazımi məlumatların hazırlanması üçün adətən ehtimal nəzəriyyəsi, seçmə yoxlamaların təşkili, məlumatların etibarlılığının qiymətləndirilməsi üçün tətbiq olunan nəzəri və riyazi statistika üsullarından və s. istifadə edilir. Həmçinin qeyd edək ki, sistemli iqtisadi-riyazi modelləşdirmədə bəzi modellər üzrə həll nəticələri adətən digər modellər üçün ilkin məlumatlar kimi istifadə olunur.

5. Ədədi həll. Bu mərhələ məsələnin ədədi həlli üçün alqoritmlərin seçilməsi və işlənməsi, EHM-də müvafiq proqramların tərtib edilməsi və bilavasitə zəruri hesablamaların aparılmasını özünə daxil edir. Verilmiş mərhələnin çətinlikləri hər şeydən əvvəl iqtisadi məsələlərin böyük ölçüyə malik olması və çox sayda məlumatlar massivinin işlənilməsi zəruriyyəti ilə şərtləşdirilir.

İqtisadi-riyazi model əsasında praktiki hesablamalar adətən çoxvariantlı xarakter daşıyır. Məhz böyük sürətə malik müasir EHM-dən istifadə etməklə tədqiq edilən obyektin fəaliyyətini müəyyən edən müxtəlif şərtlər və amillərin, onların intensivliklərinin dəyişməsi nəzərə alınmaqla çoxsaylı «model» təcrübələrini aparmaq və modelin «davranışı»nın öyrənilməsi mümkün olur. Qeyd edək ki, məsələnin ədədi həlli nəinki analitik tədqiqat nəticələrini nəzərəçarpacaq dərəcədə tamamlayır, həmçinin çox modellər üçün o yeganə mümkün vasitə olur. Ədədi üsullarla həll edilməsi mümkün olan iqtisadi məsələlər sinfi, analitik tədqiq edilən məsələlr sinfinə nisbətən daha genişdir.

6. Həll nəticələrinin iqtisadi-riyazi təhlili və onların tətbiqi. Dövrün bu sonuncu mərhələsində modelləşdirmə nəticələrinin düzgünlüyü və tamlığı, obyektin həm praktiki fəaliyyəti, həm də onun modelinin təkmilləşdirilməsi məqsədi ilə onlardan istifadə imkanları haqqında mühüm məsələ həll edilir. Bununla əlaqədar olaraq, ilk növbədə seçilmiş xüsusiyyətlər və amillər nəzərə alınmaqla qurulmuş modelin obyekt-orijinala adekvat olub-olmadığı yoxlanılır. Başqa sözlə desək, modelin verifikasiyası[1] və validasiyası[2] yoxlanmalıdır.

Alınmış nəticələrin iqtisadiyyatda tətbiqi praktiki məsələlərin həllinə yönəldilir ki, bunlara da misallar olaraq sosial-iqtisadi obyektlərin fəaliyyətinin iqtisadi-riyazi təhlilini, müvafiq obyekt və proseslərin inkişafının proqnozlaşdırılmasını, iqtisadiyyatın bütün iyerarxiya səviyyələrində optimal planların təyini və onların əsasında ən sərfəli idarəetmə qərarlarının hazırlanmasını və s. göstərə bilərik.

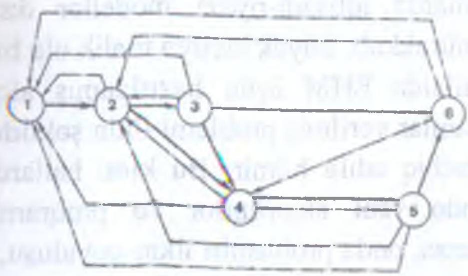
[1] Modelin verifikasiyası – modelin qoyuluşunun (məntiqinin) doğruluğunun yoxlanmasından ibarətdir.

[2] Modelin validasiyası – nəticələrin uyğunluğunun yoxlanmasından ibarətdir.

1.4. İqisadi-riyazi modelləşdirmə mərhələlərinin qarşılıqlı əlaqələri

İqtisadi-riyazi modelləşdirmənin bir dövrünün mərhələləri arasındakı qarşılıqlı əlaqələr şəkil 1.2 – də təsvir edilmişdir. Modelləşdirmənin ümumi sxemi (bax şəkil 1.1) ilə müqayisədə iqtisadi-riyazi modelləşdirmə prosesini burada gətirilmiş ilk beş mərhələ daha ətraflı xarakterizə edir. Daha doğrusu, 1-ci və 2-ci mərhələlər ümumi sxemin I mərhələsinə, 3-cü, 4-cü və 5-ci mərhələlər isə ümumi sxemin II mərhələsinə uyğundur. Əksinə, sonuncu olan 6-cı mərhələ ümumi sxemin III və IV mərhələlərini, yəni alınmış biliklərin model dilindən obyekt-orijinal dilinə keçirilməsi, bu biliklərin yoxlanması və praktikada tətbiqini özünə daxil edir.

İqtisadi-riyazi modelləşdirmənin yuxarıda göstərilən mərhələləri sıx qarşılıqlı əlaqədə olmaqla yanaşı, xüsusi hallarda bu mərhələlər arasında əks əlaqələr də ola bilər.



Şərti işarələr:

——→ Mərhələlərin ardıcıl əlaqələri.

- - - -→ Mərhələlərin əks əlaqələri.

Şəkil 1.2. İqtisadi-riyazi modelləşdirmə mərhələlərinin qarşılıqlı əlaqələri

Tədqiqat prosesində modelləşdirmənin əvvəlki mərhələlərində çatışmazlıqlar aşkar edilərsə, onda yerinə yetirilmiş mərhələlər arasındakı mümkün əks əlaqələrə diqqət yetirək. Məsələn, 2-ci mərhələdə aydın ola bilər ki, iqtisadi problemin qoyuluşu ziddiyyətlidir, yaxud bu olduqca mürəkkəb riyazi modelə gətirilir. Bu halda problemin ilkin qoyuluşunda düzəlişlər aparılmalıdır. Daha sonra modelin riyazi təhlili (3-cü mərhələ) göstərə bilər ki, problemin qoyuluşunda, yaxud onun formalaşmasında edilmiş cüzi dəyişiklik daha maraqlı analitik nəticələrin alınmasına səbəb olur.

Əvvəlki mərhələlərə qayıtmaq zəruriyyəti daha çox modelləşdirmənin 4-cü mərhələsində – ilkin məlumatların hazırlanması prosesində baş verir. Fərz edək ki, ya lazımi məlumatlar yoxdur, ya da onların hazırlanması üçün olduqca böyük xərclər tələb olunur. Onda 1-ci və 2-ci mərhələlərə, yəni problemin qoyuluşu və onun modelinin qurulmasına qayıtmaq lazım gəlir. Belə ki, tədqiqat üçün zəruri məlumatları əldə etmək məqsədi ilə göstərilən mərhələlərdə müvafiq dəyişikliklər aparılır.

Bəzi hallarda iqtisadi-riyazi modellər öz quruluşuna nəzərən çox mürəkkəb, böyük ölçüyə malik ola bilərlər. Onda əksəriyyət hallarda EHM üçün hazırlanmış alqoritmlər və standart proqramlar verilmiş probiemi ilkin şəkildə həll etmək məqsədi ilə tətbiq edilə bilmir. Bu kimi hallarda əgər qısa müddət ərzində yeni alqoritmlər və proqramlar işləmək mümkün olmazsa, onda problemin ilkin qoyuluşu, aydındır ki, həmçinin onun modeli sadələşdirilir. Bu məqsədlə bəzi şərtlər çıxarılır, yaxud birləşdirilir, nəzərə alınan amillərin sayı azaldılır, qeyri-xətti münasibətlər xətti münasibətlərlə əvəz edilir, modelin determinizmi gücləndirilir və s.

Modelləşdirmə prosesinin dövrü xarakterə malik olması haqqında yuxarıda qeyd etmişdik. Göstərdik ki, modelləşdirmənin bu və ya digər mərhələsində düzəldilməsi mümkün olmayan nöqsanlar sonrakı dövrlərdə aradan qaldırılır. Bununla bərabər hər bir dövrün nəticələri də həmçinin tamamilə müstəqil əhəmiyyət kəsb edirlər. Obyektin sadə iqtisadi-riyazi modelinin qurulmasının tədqiqindən başlamaqla səmərəli nəticələr almaq mümkündür. Bundan sonra isə nisbətən mürəkkəb və təkmilləşdirilmiş modelə keçmək olar ki, bu da özünə digər yeni şərtləri, amilləri daxil edir və daha dəqiq əsaslandırılmış riyazi münasibətlər şəklində formalaşır. Beləliklə, iqtisadi-riyazi üsulları vasitə, iqtisadi-riyazi modelləri isə iqtisadi-riyazi modelləşdirmə prosesinin məhsulu kimi başa düşmək lazımdır.

Mövzu 2. XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN ƏSASLARI

2.1.Xətti proqramlaşdırmanın ümumi və əsas məsələləri

XP nəzəriyyəsinin iqtisadi tətbiqi zamanı əsasən elə məsələlərə baxılır ki, burada hər hansı xətti funksiya üçün maksimum və ya minimum qiymətin tapılması tələb olunur. Hər bir məsələnin məchulları isə müəyyən xətti tənliklər və ya xətti bərabərsizliklər sistemini, yaxud həm xətti tənliklər, həm də xətti bərabərsizliklərdən ibarət məhdudiyyət şərtlərini ödəyirlər. Bu məsələlərdən hər biri XP-nin ümumi məsələsinin xüsusi halı kimi çıxış edir.

Tərif 1.1.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \to \max(\min); \qquad (2.1)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_i; \quad (i = \overline{1,k}) \qquad (2.2)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le a_i; \quad (i = \overline{k+1,m}) \qquad (2.3)$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,s};\ s \le n) \qquad (2.4)$$

şəkilində verilmiş, daha doğrusu (2.2) - (2.4) şərtləri daxilində (2.1) funksiyasının maksimum (minimum) qiymətinin təyin edilməsi məsələsinə XP-nin ümumi məsələsi deyilir.

Burada p_j, a_{ij} *və* a_i - verilmiş sabit kəmiyyətlər olub müvafiq olaraq məqsəd funksiyasının, məhdudiyyət şərtlərinin əmsalları və sərbəst hədlər adlanırlar.

(2.1) - (2.4) məsələsinin qoyuluşundan göründüyü kimi burada (2.1) məqsəd funksiyası və (2.2) - (2.4) şərtlərinin hamısı bütün məchullara nəzərən xətti ifadələrdən ibarətdir.

Tərif 2.2. Əgər $\kappa = 0$ ***və*** $s = n$ ***olarsa, onda (2.3) və (2.4) şərtləri daxilində (2.1) funksiyasının ekstremum***

qiymətinin axtarılması məsələsinə XP-nin simmetrik (yaxud standart) məsələsi deyilir.

Tərif 2.3. *Əgər $\kappa = m$ və $s = n$ olarsa, onda (2.2) və (2.4) şərtləri daxilində (2.1) funksiyasının ekstremum qiymətinin axtarılması məsələsinə XP-nin əsas (yaxud kanonik) məsələsi deyilir.*

XP-nin əsas məsələsi müxtəlif yazılış formalarına malikdir.

1. Geniş formada yazılış.

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \to \max (\min); \quad (2.5)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases} \quad (2.6)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \quad (2.7)$$

2. Vektor formasında yazılış.

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = PX \to \max (\min); \quad (2.8)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_o \quad (2.9)$$

$$x \geq 0 \quad (2.10)$$

Burada $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ və $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ - sətir vektorları, PX – isə bu vektorların skalyar hasilidir;

$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ - (2.9) şərtlərində

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ məchullarının əmsallarından ibarət sütun-vektorları:

$$A_o = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}$$ - sərbəst hədlərdən ibarət sütun-vektorudur.

3. Matris formasında yazılış.

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = PX \to \max\ (\min); \tag{2.11}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$AX = A_o \tag{2.12}$$

$$X \geq 0 \tag{2.13}$$

Burada $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ - sətir-matrisi;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - sütun-matrisi;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - (2.6) şərtlərinin əmsallarından ibarət matris;

$$A_o = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}$$ - sərbəst hədlərdən ibarət sütun-matrisidir.

4. Σ - cəm işarəsindən istifadə etməklə yazılış.

Məqsəd funksiyası

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n}p_jx_j\rightarrow \max(\min); \qquad (2.14)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=a_i; \quad (i=\overline{1,m}); \qquad (2.15)$$

$$x_j\geq 0, \qquad (j=\overline{1,n}) \qquad (2.16)$$

Qeyd 2.1. XP məsələsinin mümkün, optimal həllərinin tərifləri və həll edilməsindən məqsəd eyni ilə riyazi proqramlaşdırmanın ümumi məsələsində olduğu kimi ifadə edilirlər.

Tərif 2.4. Əgər (2.9) ayırılışında $x_j > 0$ məchullarının əmsallarından ibarət

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \dots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \dots\\ a_{m2}\end{pmatrix},\ \dots,\ A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \dots\\ a_{mn}\end{pmatrix};$$

vektorları sistemi xətti asılı olmazsa, onda $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ həllinə XP məsələsinin dayaq həlli deyilir.

Qeyd 2.2. A_j vektorları m – ölçülü olduğu üçün, dayaq həllin tərifindən belə nəticəyə gəlirik ki, onun müsbət komponentlərinin sayı m – dən çox ola bilməz.

Tərif 2.5. Əgər dayaq halldə sıfırdan fərqli komponentlərin sayı m olarsa, ona cırlaşmayan, əks halda isə – cırlaşan dayaq həll deyilir.

2.2. XP məsələsinin əsas məsələyə gətirilməsi

Xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsində istənilən XP məsələsinin müvafiq ümumi, simmetrik, yaxud əsas məsələyə gətirilməsi məsələləri mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu məsələlr o mənada eynigüclü, ekvivalentdirlər ki, onlardan hər birini mürəkkəb olmayan çevirmələrin köməkliyi ilə digər məsələ şəklində yazıla bilər. Deməli, əgər göstərilən məsələlərdən hər hansı birinin həlli üsulu vardırsa, onda onun vasitəsi ilə XP-nin müvafiq hər üç məsələsi də həll edilir.

Buna görə də ilk növbədə «max» XP məsələsini «min» XP məsələsinə gətirmək tələb olunur və əksinə. İkincisi, bərabərsizlik şərtlərindən müvafiq bərabərliklərə keçmək lazımdır və əksinə. Nəhayət, üçüncüsü, işarələri üzərinə qeyri-mənfilik şərtləri qoyulmayan məchullar mənfi olmayan məchullarla əvəz edilməlidir.

Əgər «max» XP məsələsini «min» XP məsələsinə gətirmək tələb olunursa və əksinə, onda bunun üçün məqsəd funksiyasının bütün əmsallarının işarələrini əksinə dəyişmək, yəni onu -1 ədədinə vurmaq kifayətdir. Bu zaman XP məsələsinin bütün şərtlərini dəyişmədən saxlamaq lazımdır.

Doğrudan da,

$$Z(X) = P_1X_1 + P_2X_2 + ... + P_nX_n \to \max(\min) \quad (2.17)$$

məqsəd funksiyası xətti olduğundan, alırıq

$$F(X) = (-1)\cdot Z(X) = -P_1X_1 - P_2X_2 - ... - P_nX_n \to \min(\max). \quad (2.18)$$

Burada aşağıdakı bərabərliklər ödənilir:

$$F_{\min}(X) = -Z_{\max}(X) \quad (2.19)$$

$$\left(F_{\max}(X) = -Z_{\min}(X)\right). \quad (2.20)$$

Beləliklə, alınmış «max» və «min» XP məsələlərinin optimal həlləri üst-üstə düşür, onların məqsəd funksiyalarının ekstremal qiymətləri isə yalnız öz işarələri ilə fərqlənirlər.

Bərabərsizlik şərtlərinin müvafiq bərabərliklərə gətirilməsi məsələlərini nəzərdən keçirək. Əvvəlcə qeyd edək ki, məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəflərini (sərbəst hədləri) mənfi olmayan hesab etmək olar, yəni $a_i \geq 0$ $(i=\overline{1,m})$. Əgər hər hansı $i=k$ bərabərsizliyi, yaxud tənliyi üçün $a_i < 0$ olarsa, onda bu bərabərsizliyi, yaxud tənliyi –1 ədədinə vururuq. Aydındır ki, nəticədə nəinki sərbəst hədd müsbət olur, həmçinin bərabərsizlik işarəsi əksinə dəyişir.

Burada iki hal mümkündür:

I hal. Tutaq ki, n – məchullu bərabərsizlik şərti

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq a_i \qquad (2.21)$$

şəklində verilmişdir.

(2.21) bərabərsizliyini müvafiq bərabərliyə gətirmək üçün onun sol tərəfinə mənfi olmayan elə

$$x_{n+i} \geq 0 \qquad (2.22)$$

kəmiyyətini əlavə etmək lazımdır ki, bərabərlik şərti ödənsin. Nəticədə n+1 məchulu özündə saxlayan uyğun xətti tənliyi alırıq:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = a_i \qquad (2.23)$$

burada

$$x_{n+i} = a_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \geq 0$$

Mənfi olmayan $x_{n+i} \geq 0$ kəmiyyətinə əlavə (yaxud asılı) məchul deyilir.

Aşağıdakı teorem belə çevirmənin mümkün olması üçün əsas verir.

Teorem 2.1. (2.21) bərabərsizliyinin hər bir $\overline{X} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ həllinə (2.23) tənliyinin və (2.22) bərabərsizliyinin yeganə $\overline{\overline{X}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+i})$ həlli uyğundur və əksinə, (2.23) tənliyinin və (2.22) bərabərsizliyinin hər bir $\overline{\overline{X}}$ həllinə (2.21) bərabərsizliyinin $\overline{X}$ həlli uyğundur.

İsbatı. Tutaq ki, $\overline{X}$ - (2.21) bərabərsizliyinin həllidir. Onda o

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n \leq a_i \qquad (2.24)$$

şərtini ödəyir.

(2.24) bərabərsizliyinin sol tərəfindəki toplananları onun sağ tərəfinə keçirək və alınmış ifadəni β_{n+i} ilə işarə etsək,

$$\beta_{n+i} = a_i - (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n) \geq 0 \qquad (2.25)$$

olar.

(2.23) tənliyində $X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+i}$ məchullarının yerinə uyğun $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, \beta_{n+i}$ qiymətlərini qoysaq, alarıq :

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n + \beta_{n+i} = a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n +$$
$$+ a_i - (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n = a_i. \qquad (2.26)$$

(2.26) və (2.25) – dən belə nəticəyə gəlirik ki, $\overline{X}$ (2.23) tənliyini və (2.22) bərabərsizliyini ödəyir. Deməli, teoremin birinci hissəsi isbat olundu.

İndi isə tutaq ki, $\overline{\overline{X}}$ (2.23) tənliyini və (2.22) bərabərsizliyini ödəyir, yəni

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n + \beta_{n+i} = a_i \qquad (2.27)$$

$$\beta_{n+i} \geq 0. \qquad (2.28)$$

Onda (2.27) tənliyinin sol tərəfində $\beta_{n+i} \geq 0$ mənfi olmayan kəmiyyətini nəzərə almasaq,

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n \leq a_i,$$

olar, daha doğrusu, $\overline{X}$ (2.21) bərabərsizliyini ödəyir və onun həllidir. Teorem isbat olundu.

II hal. Fərz edək ki, bərabərsizlikdən ibarət məhdudiyyət şərti

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq a_i. \qquad (2.29)$$

şəklində verilmişdir.

Yuxarıda gətirilmiş mülahizələr və teorem bu halda da doğrudur. Lakin, I haldan fərqli olaraq, burada (2.29) bərabərsizliyinin sol tərəfindən $X_{n+i} \geq 0$ mənfi olmayan məchulunu çıxmaq lazımdır ki, o da

$$x_{n+i} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - a_i \geq 0. \qquad (2.30)$$

kimi təyin edilir.

Nəticədə müvafiq xətti tənliyi

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+i} = a_i. \qquad (2.31)$$

şəklində alırıq.

Bununla da belə nəticəyə gəliri ki, ilkin XP məsələsində bərabərsizlik şərti «≤» şəklində verilərsə, onda onun sol tərəfinə mənfi olmayan əlavə məchul daxil etməklə bərabərlik şərtinə gətirmək olar. Əgər ilkin məsələdə bərabərsizlik şərti «≥» şəklində verilərsə, onda onun sol tərəfindən mənfi olmayan əlavə məchul çıxmaqla bərabərlik şərtinə gətirmək olar.

Deməli, əgər ilkin XP məsələsinin məhdudiyyət şərtləri özündə bərabərsizliklər saxlayarsa, onda, onlardan hər birinə öz əlavə məchulunu daxil etməklə, onları xətti tənliklərdən ibarət olan məhdudiyyət şərtlərinə gətirmək olar. Məhz buna görə də bərabərsizlikləri müvafiq bərabərliklərə çevirmək üçün daxil edilən əlavə məchulların sayı çevrilən bərabərsizliklərin sayına bərabər olur.

Bu zaman əlavə məchullar XP məsələsinin məqsəd funksiyasına sıfır əmsallarla daxil edilir və buna görə də onun qiymətinə təsir etmirlər. Bəzi hallarda

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = a_i \qquad (2.32)$$

bərabərlik şərtini

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq a_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq a_i. \end{cases} \qquad (2.33)$$

bərabərsizlikləri şəklində yazmaq tələb olunur.

Nəhayət, qeyd edək ki, əgər XP məsələsinin bəzi məchullarının işarələri üzərinə mənfi olmamaq şərtləri qoyulmazsa, onda onlardan hər biri iki mənfi olmayan məchulların fərqi ilə əvəz edilir, yəni

$$x_j = x'_j - x''_j. \text{ Burada } x'_j \geq 0 \text{ və } x''_j \geq 0 \text{ olur.} \qquad (2.34)$$

Bu zaman uyğun (2.34) əvəzetməsini verilmiş məsələnin həm məqsəd funksiyasında, həm də məhdudiyyət şərtlərində nəzərə almaq lazımdır.

XP məsələlərinin əksəriyyət həll üsullarında tələb edilir ki, məhdudiyyət şərtləri bərabərliklərdən ibarət olsun, məchulların işarələri üzərinə isə mənfi olmamaq şərtləri qoyulsün. Lakin, sonralar göstərəcəyimiz kimi, çox iqtisadi məsələlərin riyazi modellərində məhdudiyyət şərtləri əsasən bərabərsizliklər şəklində formalaşır və xətti tənliklər sistemlərinin həllində böyük çətinliklərlə qarşılaşmalı oluruq. Buna görə də istənilən XP məsələsinin müvafiq əsas məsələyə gətirilməsi xüsusi maraq kəsb edir.

Yuxarıda göstərilənləri nəzərə almaqla, **istənilən XP məsələsinin əsas məsələyə gətirilməsi üçün** aşağıdakı **ümumi qaydaları tətbiq etmək olar:**

1. «max» XP məsələsini «min» XP məsələsinə gətirmək üçün və yaxud əksinə, ilkin məsələnin məqsəd funksiyasını –1 ədədinə vurmaq lazımdır, onun bütün məhdudiyyət şərtləri isə dəyişilmədən saxlanılır.

2. Əgər bəzi məhdudiyyət şərtlərində sərbəst hədlər mənfi olarsa, onda onlardan hər birini –1 ədədinə vurmaq lazımdır.

3. Əgər məhdudiyyət şərtlərinin içərisində bərabərsizliklər vardırsa, onda onlardan hər biri, uyğun əlavə məchul daxil edilməklə, bərabərliyə çevrilir. Bu məqsədlə «$\leq$» şəklində verilmiş bərabərsizliyin sol tərəfinə müvafiq əlavə məchul «+» işarəsi ilə, «$\geq$» şəklində verilmiş bərabərsizliyin sol tərəfinə isə müvafiq əlavə məchul «-» işarəsi ilə daxil edilir.

4. Əgər bəzi məchulların işarələri üzərinə şərtlər qoyulmazsa, onda onlardan hər biri (məsələnin məqsəd funksiyasında və bütün şərtlərində) mənfi olmayan iki məchul arasındakı fərqlə əvəz edilir.

Beləliklə, bütün məchulların mənfi olmaması şərtləri daxilində, yəni əgər s = n olarsa, onda XP-nin (2.1) – (2.4) ümumi məsələsini aşağıdakı əsas məsələ şəklində yazmaq olar:

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n \rightarrow \max(\min), \quad (2.35)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = a_i, \ (i = \overline{1,k}) \quad , \qquad (2.36)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+i} = a_i, (i = \overline{k+1,m}). \qquad (2.37)$$

Məchulların işarələri üzrə şərtlər

$$x_j \geq 0, \ (j = 1,2,...,n, \ n+k+1, \ n+k+2,..., n+m). \qquad (2.38)$$

Burada $x_{n+k+1}, x_{n+k+2},..., x_{n+m}$ - əlavə məchullar, onların (2.35) məqsəd funksiyasındakı əmsalları isə $P_{n+i} = 0$, $(i = \overline{k+1,m})$ olur.

Misal 2.1. Aşağıdakı məsələni XP-nin «max» əsas məsələsi şəklində yazın:

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq -16. \end{cases}$$

Məchulların işarələri üzrə şərtlər

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Həlli.

1 – 4 ümumi qaydalarını tətbiq edək.

1. «min» XP məsələsinin «max» XP məsələsinə gətirilməsi tələb olunduğundan, əsas məsələnin məqsəd funksiyası $Z(X)$ funksiyasını –1 ədədinə vurmaqla təyin edilir, yəni

$$F(X) = (-1) \cdot Z(X) = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$$

2. Məhdudiyyət şərtlərində üçüncü bərabərsizlik –16<0 mənfi sərbəst həddinə malikdir. Buna görə də onun hər iki tərəfini –1 ədədinə vururuq. Bu zaman bərabərsizlik işarəsi əksinə dəyişir və nəticədə alırıq:

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16.$$

3. Birinci bərabərsizlik «≤» şəklində olduğundan, onun sol tərəfinə $x_4 \geq 0$ əlavə məchulu «+» işarəsi ilə daxil edilir. Üçüncü bərabərsizlik isə «≥» şəklində alınmışdır və buna görə də $x_6 \geq 0$ əlavə məchulu «-» işarəsi ilə daxil edilir. Nəticədə aşağıdakı müvafiq bərabərlikləri alırıq:

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12,$$

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_6 = 16.x$$

4. x_1, x_2, x_3 - məchullarının hamısı mənfi deyildirlər və ona görə də onların əvəz olunmasına ehtiyac yoxdur.

Beləliklə, **XP-nin əsas məsələsi** aşağıdakı şəkildə formalaşır:

Məqsəd funksiyası

$$F(X) = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_6 = 16. \end{cases}$$

Məchulların işarələri üzrə şərtlər

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 \geq 0.$$

2.3. XP məsələlərinin iqtisadi-riyazi modellərinin qurulmasına aid misallar

Bu paraqrafda XP-nin bəzi sadə məsələlərinin iqtisadi-riyazi modellərinin qurulması prosesinə baxılır. Bu məqsədlə əvvəlcə ədədi məlumatları yəni məqsəd funksiyasının əmsalları, məhdudlaşdırıcı amillər, texniki-iqtisadi göstəricilər və s. üçün verilmiş şərti qiymətləri nəzərə almaqla model qurulur. Daha sonra müvafiq məsələnin iqtisadi-riyazi modelinin ümumiləşdirilməsi gətirilir. Başqa sözlə desək, məsələnin modeli ümumi şəkildə ifadə edilir. Bu, alınmış modellərdən istifadə etməklə, iqtisadi mənası yaxud riyazi quruluşu üzrə oxşar olan və dəqiq ədədi xarakteristikalara malik məsələləri praktiki olaraq həll etməyə imkan verir.

2.3.1. Ehtiyatlardan optimal istifadə məsələsi

Məsələnin iqtisadi qoyuluşu. Müəssisədə iki növ M_1 və M_2 məhsullarının istehsalı üçün üç növ R_1, R_2 və R_3 ehtiyatlarından (xammal, material, əmək, elektrik enerjisi, iş vaxtı fondu və s.) istifadə olunur. Ehtiyatların miqdarı, məhsul vahidinə onların sərfi normaları, ayrı-ayrı növ məhsul vahidlərinin satışından əldə edilən mənfəət normaları cədvəl 2.1 - də göstərilmişdir.

Cədvəl 2.1

Ehtiyatlar	Məhsul vahidinin istehsalına ehtiyatların sərfi normaları, (kq)		Ehtiyatların miqları, (kq)
	M_1	M_2	
R_1	3	2	125
R_2	2	7	180
R_3	5	4	240
Məhsul vahidindən mənfəət, (man).	8	11	-

Məhsullar üzrə elə istehsal planı tərtib etməli ki, məhsul satışından müəssisə ən çox ümumi mənfəət əldə etsin.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

Həlli

x_1 – ilə M_1 məhsulunun istehsal planını,

x_2 – ilə M_2 məhsulunun istehsal planını işarə edək.

Onda M_1 məhsulunun satışından $8x_1$ man., M_2 məhsulunun satışından isə $11x_2$ man. mənfəət alınacaqdır. Bu zaman müəssisənin bütün məhsul satışından əldə etdiyi ümumi mənfəət ikiməchullu funksiya ilə ifadə olunacaqdır. O məsələnin məqsəd funksiyası kimi çıxış edir və onun üçün maksimum qiymət axtarılır, yəni alırıq

$$Z(X) = 8x_1 + 11x_2 \to \max.$$

M_1 və M_2 məhsullarının bütün həcmini istehsal etmək üçün R_1, R_2 və R_3 ehtiyatlarının ümumi sərfi uyğun olaraq məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \qquad (2.41)$$

Riyazi nöqteyi - nəzərdən məsələni həll etməkdən məqsəd X_1 və X_2 məchullarının elə qiymətlərini tapmaqdan ibarətdir ki, onlar (2.40) və (2.41) şərtlərini ödəsin, (2.39) məqsəd funksiyası isə öz maksimum qiymətini alsın.

İqtisadi nöqteyi-nəzərdən məsələni həll etməkdən məqsəd M_1 və M_2 məhsullarının elə istehsal planlarını tərtib etməkdən ibarətdir ki, bir tərəfdən istehsal prosesini həyata keçirmək üçün R_1, R_2 və R_3 ehtiyatlarının mövcud miqdarları imkan versin, digər tərəfdən isə məhsul satışından müəssisə ən çox ümumi mənfəət əldə etsin.

(2.39) məqsəd funksiyası xətti olduğundan, (2.40) və (2.41) şərtləri isə yalnız xətti bərabərsizlikləri özündə saxladığı üçün (2.39) – (2.41) XP məsələsidir. Bu kimi məsələlərin həlli sonra göstəriləcəkdir.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. Ehtiyatlardan optimal istifadə məsələni n $(j=\overline{1,n})$ növ məhsul istehsalı üçün m $(j=\overline{1,m})$ növ ehtiyatlardan sərf edildikdə asanlıqla ümumiləşdirmək olar.

Aşağıdakı işarələri daxil edək:

M_j - j növ məhsul;

R_i - i növ ehtiyat;

a_i - i növ ehtiyatın miqdarı;

a_{ij} - M_j məhsul vahidinin istehsalına R_i ehtiyatının sərfi norması (a_{ij} ədədləri çox vaxt texnoloji əmsallar adlanırlar);

P_j - M_j məhsul vahidinin satışından mənfəətdir.

Planlaşdırılan dövr üçün bütün a_i, a_{ij} və P_j göstəricilərinin sabit kəmiyyətlər olduğu fərz edilir.

Məsələnin ilkin məlumatlarını cədvəl 2.2 şəklində göstərək.

$(3x_1 + 2x_2)$ kq, $(2X_1 + 7X_2)$ kq və $(5X_1 + 4X_2)$ kq təşkil edir. Aydındır ki, R_1, R_2 və R_3 ehtiyatlarının ümumi sərfi onların verilmiş müvafiq 125 kq, 180 kq və 240 kq miqdarlarını aşa bilməz. Onda ehtiyatların ümumi sərfi və onların miqdarları arasındakı əlaqələr aşağıdakı bərabərsizliklər sistemi ilə ifadə edilir:

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \le 125, \\ 2X_1 + 7X_2 \le 180, \\ 5X_1 + 4X_2 \le 240. \end{cases}$$

Bu şərtlərdən hər biri göstərir ki, hər iki növ məhsul istehsalına ehtiyatın ümumi sərfi, həmin növ ehtiyatın müəssisədəki mövcud miqdarını aşa bilməz. Əgər şərtdə = (<) ödənirsə, onda ehtiyatların miqdarından tam (qalıqla) istifadə olunur.

M_1 məhsulunun istehsal planı mənfi kəmiyyətlə xarakterizə edilə bilmədiyi üçün, $X_1 \ge 0$ olmalıdır. Əgər $X_1 > 0$ olarsa, onda M_1 məhsulu istehsal edilir, $X_1 = 0$ olduqda isə o istehsal edilmir. Deməli, $X_1 > 0$ $(X_1 = 0)$ olduqda M_1 məhsulunun istehsalı müəssisənin maksimum ümumi mənfəət əldə etməsi nöqteyi-nəzərdən məqsədəuyğundur (məqsədəuyğun deyildir). Oxşar mülahizələri həmçinin M_2 məhsulu üçün də söyləmək olar və buna görə də $X_2 \ge 0$ alırıq

Beləliklə, cədvəl 2.1 – də verilmiş ilkin məlumatlar nəzərə alınmaqla, məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə formalaşır:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 8X_1 + 11X_2 \rightarrow \max, \tag{2.39}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \le 125, \\ 2X_1 + 7X_2 \le 180, \\ 5X_1 + 4X_2 \le 240, \end{cases} \tag{2.40}$$

Cədvəl 2.2

Ehtiyatlar	Məhsul vahidinin istehsalına ehtiyatların sərfi normaları				Ehtiyatların miqdarı
	M_1	M_2	...	M_n	
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Məhsul vahidindən mənfəət	P_1	P_2	...	P_n	-

Elə məhsul istehsalı planı tərtib edin ki, bütün məhsul həcminin satışından müəssisə ən çox ümumi mənfəət almış olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

Həlli

X_j - ilə M_j məhsulunun istehsal planını işarə edək (məchul kəmiyyət).

Onda bütün məhsul həcminin satışından müəssisənin əldə etdiyi ümumi mənfəət n sayda X_1, X_2,..., X_n məchulları daxil olan məqsəd funksiyası ilə ifadə edilir və onun üçün maksimum qiymət axtarılır, yəni alırıq:

$$Z(x) = P_1X_1 + P_2X_2 + ... + P_nX_n \rightarrow \max \ .$$

Birinci növ ehtiyatlar üçün isə

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1$$

bərabərsizliyindən ibarət məhdudiyyət şərtini alırıq.

Bu o deməkdir ki, bütün növ məhsulların istehsalına R_1 ehtiyatının ümumi sərfi onun mövcud a_i miqdarını aşa bilməz. Oxşar şərtlər yerdə qalan bütün növ ehtiyatlar üçün də ödənilir, yəni

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le a_i, (i = \overline{2,n}) \ .$$

Həmçinin nəzərə almaq lazımdır ki, məhsul istehsalı planları mənfi kəmiyyətlər ola bilməzlər, yəni $X_j \geq 0, (j = \overline{1,n})$. Əgər məsələnin həlli nəticəsində $X_j > 0$ $(X_j = 0)$ alınarsa, onda M_j məhsulunun istehsalı, müəssisənin maksimum ümumi mənfəət əldə etməsi nöqteyi-nəzərdən, sərfəlidir (sərfəli deyildir).

Beləliklə, ümumi qoyuluşda ehtiyatlardan optimal istifadə məsələsinin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə olur:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = P_1X_1 + P_2X_2 + ... + P_nX_n \rightarrow \max, \qquad (2.42)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq a_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_mx_2 + ... + a_{mn}x_n \leq a_m, \end{cases} \qquad (2.43)$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_j \geq 0, (j = \overline{1,n}). \qquad (2.44)$$

Alınmış (2.42) – (2.44) XP məsələsinin həlli nəticəsində x_1, x_2,..., x_n məchullarının optimal qiymətləri təyin edilir, yəni M_1, M_2,..., M_n məhsullarının optimal istehsal planları tapılır. Bu plan üzrə istehsal olunmuş məhsulun satışından müəssisə ən çox ümumi mənfəət əldə edir.

Həmçinin qeyd edək ki, (2.42) – (2.44) XP məsələsinin iqtisadi-riyazi modelini ($\sum$) cəm işarəsindən istifadə etməklə daha yığcam formada yazmaq olar:

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} P_jx_j \rightarrow \max,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i , (i = \overline{1,m});$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$x_j \ge 0 , (j = \overline{1,n}).$$

2.3.2. Materialların optimal biçilməsi məsələsi

Əksəriyyət hallarda sənaye müəssisələrinə eyni, standart ölçülərə malik olan materiallar (taxta, şüşə, faner, parça, polad lövhələr və s.) daxil olur. İstehsalın ayrı-ayrı növ tədarüklərə olan zəruri miqdarda tələbatlarını ödəmək üçün bu materialları biçmək lazım gəlir. Bu məqsədlə müxtəlif texnoloji biçmə üsullarından istifadə etmək olar ki, onlardan da hər birinə materiallardan alınmış istehsal tullantıları (uzunluq, sahə, həcm, kütlə, dəyər kəmiyyətləri üzrə və s.) uyğundur. Belə bir şəraitdə materialların optimal biçilməsi məsələsi mühüm praktiki əhəmiyyət kəsb edir. Burada əsas məqsəd elə texnoloji biçmə üsullarının və onların tətbiqi ilə biçilən materialların miqdarının təyin edilməsindən ibarətdir ki, nəticədə tədarüklərin müəssisədə buraxılışı üzrə plan tapşırıqları yerinə yetirilsin, ümumi istehsal tullantıları isə minimum olsun.

Məsələnin iqtisadi qoyuluşu. Tikiş fabrikində məmulatlar üçün standart ölçüyə malik parçadan beş növ D_1, D_2, D_3, D_4 və D_5 detallarını hazırlamaq lazımdır. Parçanın biçilməsi məqsədi ilə üç növ T_1, T_2 və T_3 texnoloji üsulları tətbiq oluna bilər. Ayrı-ayrı texnoloji üsullardan istifadə edildikdə hər $10m^2$ parçadan detalların çıxımı normaları, istehsal tullantısının dəyəri, həmçinin detalların hazırlanması üzrə plan tapşırıqları cədvəl 2.3 – də verilmişdir.

Hər bir texnoloji üsulla biçilən parçanın $10m^2$ -lərlə elə miqdarının tapılması tələb olunur ki, nəticədə bütün növ detallar üzrə nəzərdə tutulmuş plan tapşırıqları yerinə yetirilsin və parçadan alınmış istehsal tullantılarının ümumi dəyəri ən az olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

Cədvəl 2.3

Biçmə üsulları	10 m² parçadan detalların çıxımı normaları (ədəd)					10m² parçadan tullantının dəyəri (min man.)
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
T_1	4	7	-	3	5	30
T_2	3	4	5	2	-	25
T_3	-	6	4	3	1	15
Plan (ədəd)	230	180	310	165	140	-

Həlli

X_1, X_2 və X_3 - ilə müvafiq olaraq T_1, T_2 və T_3 texnoloji üsulları tətbiq edilməklə biçilən parçanın $10m^2$–lərlə miqdarını işarə edək.

Onda T_1 üsulu üzrə biçilən parçadan alınmış tullantının dəyəri $30X_1$ min man., T_2 üsulu üzrə – $25X_2$ min man. və T_3 üsulu üzrə – $15X_3$ min man. təşkil edəcəkdir. Beləliklə prçadan alınmış istehsal tullantılarının ümumi dəyəri üçməchullu funksiya ilə ifadə edilir. O məqsəd funksiyası şəklində çıxış edir və bu funksiya üçün minimum qiymət tapılır. Daha doğrusu alırıq:

$$Z(x) = 30X_1 + 25X_2 + 15X_3 \to \min .$$

Hər üç üsulun tətbiqi ilə hazırlanmış D_1, D_2, D_3, D_4 və D_5 detallarının ümumi miqdarları uyğun olaraq $(4X_1 + 3X_2)$ ədəd, $(7X_1 + 4X_2 + 6X_3)$ ədəd, $(5X_2 + 4X_3)$ ədəd, $(3X_1 + 2X_2 + 3X_3)$ ədəd və $(5X_1 + X_3)$ ədəd təşkil edəcəkdir.

Detalların hazırlanması üzrə plan tapşırıqları tam yerinə yetirilməli olduğu üçün aşağıdakı bərabərliklər şəklində məhdudiyyət şərtləri ödənilməlidir:

$$\begin{cases} 4X_1 + 3X_2 \qquad\qquad = 230, \\ 7X_1 + 4X_2 + 6X_3 = 180, \\ \qquad\quad 5X_2 + 4X_3 = 310, \\ 3X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 165, \\ 5X_1 + \qquad\quad X_3 = 140. \end{cases}$$

T_1 üsulu ilə biçilən parçanın miqdarı nıənfi kəmiyyət ola bilmədiyi üçün $X_1 \geq 0$ ödənilməlidir. Əgər $X_1 > 0$ olarsa, onda T_1 üsulu ilə X_1 miqdarda parça biçiləcəkdir, lakin $X_1=0$ alındıqda isə, bu üsul ilə parça biçilmir. Deməli, $X_1 > 0$ ($X_1=0$) olduqda T_1 üsulu ilə parçanın biçilməsi, tullantıların ümumi dəyərinin minimumlaşdırılması nöqteyi-nəzərdən sərfəlidir (sərfəli deyildir). Oxşar mülahizələri həmçinin yerdə qalan T_2 və T_3 üsulları ilə biçilən parçanın miqdarları üzrə də söyləmək olar. Buna görə də $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$ şərti ödənilir.

Cədvəl 2.3 – də verilmiş ilkin məlumatları nəzərə almaqla məsələnin iqtisadi-riyazi modelini aşağıdakı şəkildə yazırıq:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 30X_1 + 25X_2 + 15X_3 \rightarrow \min, \tag{2.45}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 4X_1 + 3X_2 \qquad\qquad = 230, \\ 7X_1 + 4X_2 + 6X_3 = 180, \\ \qquad\quad 5X_2 + 4X_3 = 310, \\ 3X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 165, \\ 5X_1 + \qquad\quad X_3 = 140, \end{cases} \tag{2.46}$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0. \tag{2.47}$$

(2.45) – (2.47) XP məsələsinin həlli nəticəsində ayrı-ayrı üsullarla biçilən parçanın optimal miqdarları təyin edilir. Beləliklə, detallar üzrə plan tapşırıqları yerinə yetirilir, parçadan alınmış istehsal tullantılarının ümumi dəyəri isə minimum qiymət alır.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. İndi isə fərz edək ki, standart ölçüyə malik materiallardan n $(j=\overline{1,n})$ növ müxtəlif tədarüklər hazırlamaq lazımdır və bu məqsədlə m $(i=\overline{1,m})$ texnoloji biçmə üsullarından istifadə etmək olar. Verilmiş şərtlər daxilində materialların optimal biçilməsi məsələsini ümumiləşdirmək olar.

Aşağıdakı şərti işarələri daxil edək:

D_j - j növ tədarük;

T_i - materialların biçilməsinin i texnoloji üsulu;

b_j - j növ tədarük planı;

a_{ij} - i biçmə üsulu tətbiq edildikdə material vahidindən j növ tədarükün çıxımı;

r_i - i biçmə üsulu tətbiq edildikdə material vahidindən alınmış tullantıların dəyəri.

Onda məsələnin bütün şərtlərini cədvəl 2.4 şəklində göstərmək olar.

Cədvəl 2.4

Biçmə üsulları	**Material vahidindən tədarüklərin çıxımı normaları**				**Material vahidindən tullantıların dəyəri**
	D_1	**D_2**	**...**	**D_n**	
T_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	r_1
T_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	r_2
...	...	...	...	...	...
T_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	r_m
Plan	b_1	b_2	...	b_n	-

Ayrı-ayrı üsullarla biçilən materialların elə miqdarlarını tapmaq lazımdır ki, bütün növ tədarüklərin hazırlanması üzrə plan tapşırıqları yerinə yetirilsin, materiallardan alınmış istehsal tullantılarının ümumi dəyəri isə minimum olsun.

Məsələnin iqtisadi - riyazi modelini qurun.

Həlli

X_i - ilə T_i texnoloji üsulu tətbiq edilməklə biçilən materialların miqdarını işarə edək (məchul kəmiyyət). Onda bütün texnoloji üsullarla biçilən materiallardan alınmış istehsal tullantılarının ümumi dəyəri m sayda X_1, X_2,..., X_m məchulları daxil olan məqsəd funksiyası ilə ifadə edilir və onun üçün minimum qiymət axtarılır, yəni alırıq:

$$Z(x) = r_1 x_1 + r_2 x_2 + ... + r_m x_m \to \min .$$

Birinci növ tədarük üçün

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m = b_1 .$$

bərabərlik şərti ödənilir. O göstərir ki, birinci növ tədarük üçün verilmiş b_1 plan tapşırığı materialların müxtəlif T_1, T_2,..., T_m texnoloji üsulları ilə biçilməsindən alınmış müvafiq növ tədarük miqdarlarının cəmi əsasında yerinə yetirilir. Oxşar tənliklər həmçinin yerdə qalan bütün növ tədarüklər üçün də ödənilir:

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + ... + a_{mj} x_m = b_j , \ (j = \overline{2,n}) .$$

Aydındır ki, ayrı-ayrı texnoloji üsullarla biçilən materialların miqdarları mənfi kəmiyyətlər ola bilməzlər, yəni $X_i \geq 0, (j = \overline{1,m})$ ödənilməlidir. Əgər məsələnin həlli nəticəsində $X_i > 0, (X_i = 0)$ alınarsa, onda T_i üsulu ilə materialların biçilməsi, tullantıların minimum ümumi dəyərinə nail olmaq nöqteyi-nəzərdən, sərfəlidir (sərfəli deyildir). Beləliklə, ümumi qoyuluşda materialların optimal biçilməsi məsələsinin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə formalaşır:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = r_1 x_1 + r_2 x_2 + ... + r_m x_m \to \min , \tag{2.48}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m = b_2, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m = b_n, \end{cases} \qquad (2.49)$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_i \geq 0, \ (i = \overline{1,m}). \qquad (2.50)$$

(2.48) - (2.50) XP məsələsinin həlli nəticəsində $T_1, T_2, \ldots, T_m$ texnoloji üsulları ilə biçilən materialların optimal miqdarları təyin edilir. Bu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ tədarükləri üzrə istehsal planlarını yerinə yetirməyə və materiallardan alınmış istehsal tullantılarının minimum ümumi dəyərinə nail olmağa imkan verir.

Ümumi məsələnin, daha yığcam formada olmaqla, iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə yazılır:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i x_i \to \min,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i = b_j, \ (j = \overline{1,n});$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_i \geq 0, (j = \overline{1,m}).$$

2.3.3. Optimal yem rasionunun tərtibi məsələsi (yaxud pəhriz məsələsi)

Qarışıq və birləşmələrin optimal tərkibinin təyini məsələlərindən çoxu əsasən kənd təsərrüfatı, yeyinti, mikrobiologiya, metallurgiya, neft-kimya sənayesi müəssisələrinin planlaşdırılması və idarə edilməsi prosesində geniş istifadə olunur. Burada hazır məhsulu almaq üçün müxtəlif növ xammal və materiallar qarışdırılır, birləşdirilir, əridilir və s. verilmiş ilkin komponentlər adətən, bu və ya digər dərəcədə, qarşılıqlı əvəzedilən olurlar. Bu zaman öz keyfiyyəti üzrə zəruri tələblərə cavab verən və ən az xərclə əldə edilən hazır məhsulun optimal tərkibinin təyini problemi mühüm praktiki əhəmiyyət kəsb edir.

Müvafiq problemə misal olaraq, kənd təsərrüfatı müəssisəsində heyvanlar üçün optimal yem rasionunun tərtibi məsələsinə baxaq.

Məsələnin iqtisadi qoyuluşu. Heyvanların yemlənməsi zamanı onlardan hər birinin S_1, S_2, S_3 və S_4 qidalı maddələrə olan gündəlik tələbatları tam ödənilməlidir. Bunlara misal olaraq yağları, karbohidratları, zülalları, vitaminləri və s. göstərmək olar. Qidali maddələrə olan tələbatlar üç növ M_1, M_2 və M_3 yemlərindən istifadə etməklə ödənilə bilər. Hər bir növ yemin 1 kq-da olan qidalı maddələrin miqdarları, onlara olan gündəlik tələbatlar, həmçinin ayrı-ayrı növ yemlərin 1 kq-nın dəyərləri cədvəl 2.5 – də verilmşdir.

Cədvəl 2.5

Qidalı maddələr	**1 kq yemdə olan qidalı maddələrin miqdarları**			**Gündəlik tələbatlar**
	M_1	M_2	M_3	
S_1	2	4	3	50
S_2	1	2	6	25
S_3	3	7	2	60
S_4	5	1	4	34
1 kq yemin dəyəri, (man.)	40	24	15	-

Gündəlik elə yem rasionu tərtib etməli ki, lazımi miqdarda qidalı maddələrin alınması təmin edilsin və yemlərin ümumi dəyəri ən az olsun.

Məsələnin iqtisadi - riyazi modelini qurun.

Həlli

X_1 , X_2 və X_3 – ilə gündəlik yem rasionuna daxil olan M_1, M_2 və M_3 yemlərinin uyğun miqdarlarını işarə edək. Onda

M_1, M_2 və M_3 yemlərinin ümumi dəyəri $Z(x)=40X_1+24X_2+15X_3$ (man.) xətti funksiyası şəklində ifadə edilir və onun üçün minimum qiymət axtarılır, yəni

$$Z(x)=40X_1+24X_2+15X_3 \to \min \quad \text{olur.}$$

İstifadə olunan yemlərdəki S_1, S_2, S_3, S_4 qidalı maddələrin ümumi miqdarları isə müvafiq olaraq $2X_1+4X_2+3X_3$, $X_1+2X_2+6X_3$, $3X_1+7X_2+2X_3$ və $5X_1+X_2+4X_3$ qədər təşkil edəcəkdir.

Gündəlık rasionda qidalı maddələrə olan tələbatlar tam ödənilməli olduğu üçün, aşağıdakı bərabərsizliklərdən ibarət məhdudiyyət şərtlərini alırıq:

$$\begin{cases} 2X_1+4X_2+3X_3 \ge 50, \\ X_1+2X_2+6X_3 \ge 25, \\ 3X_1+7X_2+2X_3 \ge 60, \\ 5X_1+X_2+4X_3 \ge 34. \end{cases}$$

M_1 yeminin miqdarı mənfi kəmiyyət ola bilməz və buna görə də $X_1 \ge 0$ ödənilməlidir. Əgər $X_1>0$ olarsa, onda yem rasionuna M_1 yeminin daxil edilməsi əlverişlidir, lakin $X_1=0$ olduqda isə – əlverişli deyildir. Oxşar mülahizələr M_2 və M_3 yemləri üçün də doğrudur, yəni $X_2 \ge 0$, $X_3 \ge 0$.

Beləliklə, cədvəl 2.5 – dən məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi formalaşır:

məqsəd funksiyası

$$Z(x)=40X_1+24X_2+15X_3 \to \min, \qquad (2.51)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 50, \\ X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 25, \\ 3X_1 + 7X_2 + 2X_3 \geq 60, \\ 5X_1 + X_2 + 4X_3 \geq 34. \end{cases} \qquad (2.52)$$

Məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0. \qquad (2.53)$$

(2.51) – (2.53) XP məsələsini həll etməklə X_1, X_2 və X_3 məchulları üçün optimal qiymətlər, yəni gündəlik yem rasionuna daxil ediləcək ayrı-ayrı yemlərin ən səmərəli miqdarları təyin edilir.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. Optimal yem rasionunun tərtibi məsələsini asanlıqla ümumiləşdirmək olar

Aşağıdakı şərti işarələri daxil edək::

n - yem növlərinin sayı, $(j = \overline{1,n})$;

m - qidalı maddələrin növlərinin sayı, $(i = \overline{1,m})$;

M_j - j növ yem;

S_i - i növ qidalı maddə;

b_i - gündəlik yem rasionunda i növ qidali maddəyə olan tələbat;

a_{ij} - j növ yemin 1 kq-da olan i növ qidalı maddənin miqdarı;

r_j - j növ yemin 1 kq-nın dəyəri.

Məsələnin bütün şərtlərini cədvəl 2.6 şəklində göstərək.

Cədvəl 2.6

Qidalı maddələr	**1 kq yemdə olan qidalı maddələrin miqdarları**				**Gündəlik tələbatlar**
	M_1	**M_2**	**...**	**M_n**	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
1 kq yemin dəyəri, (man.)	r_1	r_2	...	r_n	-

Gündəlik elə yem rasionunun təyin edilməsi tələb olunur ki, o qidalı maddələr üzrə mövcud tələbatların tam ödənilməsini təmin etsin və yemlərin ümumi dəyəri ən az olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

Həlli

X_j - ilə M_j yeminin miqdarını işarə edək.

Onda gündəlik yem rasionunda istifadə edilən yemlərin ümumi dəyəri n sayda $X_1, X_2,..., X_n$ məchullarından asılı olan məqsəd funksiyası ilə ifadə olunacaqdır və onun üçün minimum qiymət axtarılacaqdır, yəni

$$Z(x) = r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_nx_n \rightarrow \min \text{olur}.$$

S_1 qidalı maddəsi üçün alırıq:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1,$$

yəni istifadə olunan yemlərdəki birinci növ qidalı maddənin ümumi miqdarı yem rasionunda nəzərdə tutulmuş tələbatdan az ola bilməz.

Oxşar şərtlər yerdə qalan $S_1, S_2,..., S_n$ qidali maddələri üzrə də ödənilməlidir, yəni

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i, \quad (i = \overline{2,m}).$$

Aydındır ki, yemlərin miqdarları mənfi kəmiyyətlər ola bilməzlər və buna görə də $X_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$ ödənilir. Əgər məsələnin həlli nəticəsində $X_j > 0 \ (X_j = 0)$ alınarsa, onda gündəlik yem rasionunda M_j yemindən istifadə olunması onların ümumi dəyərinin minimumlaşdırılması nöqteyi-nəzərdən məqsədəuyğundur (məqsədəuyğun deyildir).

Beləliklə, optimal yem rasionunun tərtibi məsələsinin ümumi qoyuluşda iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə formalaşır:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n \rightarrow \min, \tag{2.54}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases} \tag{2.55}$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.56}$$

(2.54) – (2.56) XP məsələsini həll etməklə gündəlik yem rasionunda istifadə olunan M_1, M_2 ,…, M_n yemlərinin optimal miqdarları təyin edilir. Bu zaman S_1, S_2,…,S_n qidalı maddələrinə olan tələbatlar tam ödənilir, yemlərin ümumi dəyəri isə minimum olur.

Daha yığcam formada ümumi məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı kimi yazılır:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{m} r_j x_j \rightarrow \min,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i, \ (i = \overline{1,m});$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_j \geq 0, (j = \overline{1,n}).$$

Qeyd edək ki, bir sıra müxtəlif məsələləri də yuxarıda baxdığımız müvafiq məsələyə gətirmək mümkündür. Bunlara misallar olaraq ərinti, yanacaq, mineral gübrələr qarşıqlarının, təyin olunmuş pəhrizin optimal tərkibinin tapılması məsələlərini və s. göstərmək olar.

2.3.4. Avadanlığın optimal yüklənməsi məsələsi

Müəssisələrdə çox vaxt hər birində bu və ya digər məhsulun buraxılışı nöqteyi-nəzərdən, qarşılıqlı əvəzedilən avadanlıqlardan istifadə olunur. Bu avadanlıqlar çox az hallarda bircins olurlar. Belə ki, hətta eyni növ dəzgahlar və digər avadanlıqlar belə öz buraxılış illəri, aşınma dərəcəsi, iş vaxtı fondu, məhsuldarlığı, onlarda məmulatların emalı dəyəri və s. göstəricilər üzrə fərqlənirlər. Həmçinin verilmiş hər bir avadanlıqda buraxılan məhsul növləri də müxtəlif olurlar. Bundan başqa, məsələn, müəyyən dəzgahlarda bəzi detalların istehsalı nisbətən daha az vaxt məsrəfləri ilə yerinə yetirildiyi halda, onlarda digər detalların buraxılışı heç də kifayət qədər sərfəli olmur.

Beləliklə, qarşılıqlı əvəzedilən avadanlıqların optimal yüklənməsi, yəni onlardan ən səmərəli istifadə olunması məsələsi mühüm praktiki əhəmiyyət kəsb edir.

Məsələnin iqtisadi qoyuluşu. Tutaq ki, müəssisədə dörd növ $(j = 1,2,3,4)$ D_1, D_2, D_3, və D_4 məmulatlarının uyğun olaraq 5000, 2000, 3000 və 1800 ədəd miqdarında istehsal planları verilmişdir. Bu məqsədlə üç növ $(i = 1,2,3)$ S_1, S_2 və S_3 dəzgahlarından istifadə olunur ki, onlar da öz məhsuldarlıqları, iş vaxtının sərfi normaları və məhsulların emalı dəyərləri üzrə bir-birindən fərqlənirlər. Ayrı-ayrı növ dəzgahların iş vaxtı fondları məhduddur və uyğun olaraq 800, 1000, 1500 saat təşkil edirlər. Dəzgahlarda məhsul vahidinə iş vaxtının sərfi normaları və onun emalı dəyərləri cədvəl 2.7 – də verilmişdir.

Cədvəl 2.7

Dəzgahların növləri	Məhsul vahidinə iş vaxtının sərfi normaları, (s)				Məhsul vahidinin emalı dəyərləri, (min man.)			
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	0,50	0,15	0,40	0,60	12	2	3	25
S_2	0,40	0,12	0,20	0,50	16	14	35	2
S_3	0,32	0,14	0,35	0,45	10	25	4	3

Hər bir növ dəzgahdan istifadə etməklə istehsal olunan məmulatların elə miqdarlarını tapmaq tələb olunur ki, verilmiş plan tapşırıqları yerinə yetirilsin və məmulatların ümumi emalı dəyəri ən az olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

Həlli

X_{ij} - ilə i növ dəzgahda emal olunan j növ məmulatların miqdarını işarə edək.

Onda məmulatların S_1 dəzgahlarında emalı dəyəri $12X_{11}+2X_{12}+3X_{13}+25X_{14}$ min man., S_2 dəzgahlarında - $16X_{21}+14X_{22}+35X_{23}+2X_{24}$ min man. və S_3 dəzgahlarında isə - $10X_{31}+25X_{32}+4X_{33}+3X_{34}$ min man. təşkil edəcəkdir. Beləliklə, müəssisə üzrə məmulatların ümumi emalı dəyəri $3\cdot 4=12$ sayda X_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$ məchulları daxil olan xətti funksiya ilə ifadə edilir. O məqsəd funksiyası şəklində çıxış edir və onun üçün minimum qiymət axtarılır, yəni

$$Z(x)=12X_{11}+2X_{12}+3X_{13}+25X_{14}+16X_{21}+14X_{22}+35X_{23}+2X_{24}+$$
$$+10X_{31}+25X_{32}+4X_{33}+3X_{34}\to \min$$

S_1, S_2, S_3 dəzgahlarında məmulatların emalı ilə əlaqədar iş vaxtının ümumi məsarifləri uyğun olaraq

$$(0{,}50X_{11} + 0{,}15X_{12} + 0{,}40X_{13} + 0{,}60X_{14})\ \text{saat},$$
$$(0{,}40X_{21} + 0{,}12X_{22} + 0{,}20X_{23} + 0{,}50X_{24})\ \text{saat},$$
$$(0{,}32X_{31} + 0{,}14X_{32} + 0{,}35X_{33} + 0{,}45X_{34})\ \text{saat}$$

təşkil edirlər.

Bu məsariflər dəzgahların məhdud iş vaxtı fondlarını aşa bilmədiyi üçün aşağıdakı bərabərsizliklərdən ibarət məhdudiyyət şərtləri ödənilməlidir:

$$\begin{cases} 0{,}50X_{11} + 0{,}15X_{12} + 0{,}40X_{13} + 0{,}60X_{14} \le 800, \\ 0{,}40X_{21} + 0{,}12X_{22} + 0{,}20X_{23} + 0{,}50X_{24} \le 1000, \\ 0{,}32X_{31} + 0{,}14X_{32} + 0{,}35X_{33} + 0{,}45X_{34} \le 1500. \end{cases}$$

Bu zaman D_1, D_2, D_3, və D_4 məmulatlarının ümumi miqdarları müvafiq olaraq

$$(X_{11} + X_{21} + X_{31})\ \text{ədəd},\ (X_{12} + X_{22} + X_{32})\ \text{ədəd},$$
$$(X_{13} + X_{23} + X_{33})\ \text{ədəd},\ (X_{14} + X_{24} + X_{34})\ \text{ədəd}$$

təşkil edəcəkdir.

Müəssisədə məmulatların istehsalı üzrə nəzərdə tutulmuş plan tapşırıqları tam yerinə yetirilməli olduğundan alırıq:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 5000, \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 2000, \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 3000, \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 1800. \end{cases}$$

S_1 dəzgahlarında emal olunan məmulatların miqdarları mənfi kəmiyyətlər ola bilməzlər və buna görə də $X_{1j} \ge 0$ $(j = 1,2,3,4)$ ödənilməlidir. Əgər $X_{1j} > 0$ alınarsa, onda j növ məmulatlar birinci növ dəzgahlarda emal olunurlar, $X_{1j} = 0$ olduqda isə – emal olunmurlar. Deməli, $X_{1j} > 0$ $(X_{1j} = 0)$ olarsa, onda j növ məmulatların S_1 dəzgahlarında emalı, müəssisədə məmulatların ümumi emalı dəyərinin minimumlaşdırılması nöqteyi-nəzərdən, sərfəlidir (sərfəli deyildir). Oxşar mülahizələri həmçinin yerdə qalan S_2,

S_3 dəzgahlarında emal olunan məmulatlar üçün də söyləmək olar, yəni $X_{2j} \geq 0$, $X_{3j} \geq 0$ $(j = 1,2,3,4)$ ödənilir.

Cədvəl 2.7 – də verilmiş şərti məlumatları nəzərə almaqla, məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə formalaşır:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 12X_{11} + 2X_{12} + 3X_{13} + 25X_{14} + \\ +16X_{21} + 14X_{22} + 35X_{23} + 2X_{24} + \\ +10X_{31} + 25X_{32} + 4X_{33} + 3X_{34} \to \min, \qquad (2.57)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 0,50X_{11} + 0,15X_{12} + 0,40X_{13} + 0,60X_{14} \leq 800, \\ 0,40X_{21} + 0,12X_{22} + 0,20X_{23} + 0,50X_{24} \leq 1000, \\ 0,32X_{31} + 0,14X_{32} + 0,35X_{33} + 0,45X_{34} \leq 1500. \end{cases} \qquad (2.58)$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 5000, \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 2000, \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 3000, \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 1800. \end{cases} \qquad (2.59)$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4). \qquad (2.60)$$

(2.57) – (2.60) XP məsələsinin həlli nəticəsində ayrı-ayrı dəzgahlarda emal olunan məmulatların optimal miqdarları təyin edilir. Bu zaman nəzərdə tutulmuş istehsal planlarını yerinə yetirmək üçün dəzgahların məhdud iş vaxtı fondları imkan verir, məmulatların ümumi emalı dəyəri isə minimum olur.

Məsələnin ümumi qoyuluşu. Tutaq ki, müəssisədə n $(j = \overline{1,n})$ növ məmulatların istehsalı üçün m $(i = \overline{1,m})$ növ qarşılıqlı əvəzedilən avadanlıqlardan istifadə olunur. Onda avadanlığın optimal yüklənməsi məsələsini asanlıqla ümumiləşdirmək olar.

Aşağıdakı şərti işarələri qəbul edək:

D_j - j növ məmulatlar;

S_i - i növ avadanlıqlar;

b_j - j növ məmulatlar üzrə istehsal planı;

t_i - i növ avadanlıqların iş vaxtı fondu;

a_{ij} - j növ məmulat vahidinin emalına i növ avadanlığın iş vaxtının sərfi norması;

r_{ij} - j növ məmulat vahidinin i növ avadanlıqda emalı dəyəri .

Məsələnin bütün şərtlərini cədvəl 2.8 şəklində göstərək.

Cədvəl 2.8

Avadanlıqların növləri	Məmulat vahidinin emalına iş vaxtının sərfi norması				İş vaxtı fondu	Məmulat vahidinin emalı dəyəri			
	D_1	D_2	...	D_n		D_1	D_2	...	D_n
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	t_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	t_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	t_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}
Plan	b_1	b_2	...	b_n	-	-	-	-	-

Ayrı-ayrı avadanlıqlarda emal olunan məmulatların elə miqdarlarını tapın ki, nəzərdə tutulmuş istehsal planları tam yerinə yetirilsin, onların ümumi emalı dəyəri isə ən az olsun.

Məsələnin iqtisadi-riyazi modelini qurun.

Həlli

X_{ij} – ilə S_i avadanlığında emal olunan D_j məmulatlarının miqdarını işarə edək.

Onda məmulatların ümumi emalı dəyəri $m \cdot n$ sayda X_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ məchullarından asılı olan xətti funksiya ilə ifadə ediləcəkdir. Bu məsələnin məqsəd funksiyası olur və onun üçün minimum qiymət tapılır, yəni

$$\begin{aligned} Z(x) = r_{11}x_{11} + r_{12}x_{12} + \ldots + r_{1n}x_{1n} + \\ + r_{21}x_{21} + r_{22}x_{22} + \ldots + r_{2n}x_{2n} + \ldots + \\ + r_{m1}x_{m1} + r_{m2}x_{m2} + \ldots + r_{mn}x_{mn} \to \min. \end{aligned} \qquad (2.61)$$

Bütün növ məmulatların emalına iş vaxtının ümumi sərfi avadanlıqların məhdud iş vaxtı fondlarını aşa bilmədiyi üçün alırıq:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n} \le t_1, \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n} \le t_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_{mn} \le t_m. \end{cases} \qquad (2.62)$$

Məmulatlar üzrə nəzərdə tutulmuş istehsal planları tam yerinə yetirilməlidir və buna görə də

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = b_1, \\ X_{12} + X_{22} + \ldots + X_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = b_n. \end{cases} \qquad (2.63)$$

Məmulatların miqdarları mənfi kəmiyyətlər ola bilməzlər, yəni

$$X_{ij} \ge 0\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \qquad (2.64)$$

Əgər məsələnin həlli nəticəsində $X_{ij} > 0$ $(X_{ij} = 0)$ alınarsa, onda j növ məmulatların i avadanlıqlarında emalı, məmulatların müəssisədə ümumi emalı dəyərini minimumlaşdırmaq nöqteyi-nəzərdən məqsədəuyğundur (məqsədəuyğun deyildir).

(2.61) – (2.64) XP məsələsi avadanlığın optimal yüklənməsinin ümumi məsələsinin iqtisadi-riyazi modelidir. Onun həll edilməsindən məqsəd – elə $X=(X_{11}, X_{12},..., X_{mn})$ planını tapmaqdan ibarətdir ki, (2.62) – (2.64) şərtləri ödənsin, (2.61) məqsəd funksiyası isə minimum qiymət alsın.

Daha yığcam şəkildə (2.61) – (2.64) XP məsələsini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

məqsəd funksiyası

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij} \to \min, \qquad (2.65)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_{ij} \le t_i, (i=\overline{1,m}); \qquad (2.66)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, (j=\overline{1,n}); \qquad (2.67)$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$X_{ij} \ge 0, \ (i=\overline{1,m}) \ (j=\overline{1,n}). \qquad (2.68)$$

Qeyd edək ki, (2.65) – (2.68) modeli qarşılıqlı əvəzedilən avadanlıqların optimal yüklənməsi məsələsinin heç də bütün mümkün qoyuluşlarını əks etdirmir.

Qeyd 2.1. Əgər bəzi məsələlərdə nomenklatura üzrə məmulatların istehsal planlarının artıqlaması ilə yerinə yetirilməsi mümkünlüyü fərz edilərsə, onda (2.67) məhdudiyyət şərtləri dəyişdirilərək aşağıdakı şəkildə alınır:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \ge b_j, \ (j=\overline{1,n}).$$

Qeyd 2.2. Bəzi hallarda bu və ya digər avadanlıqda (dəzgahda) müxtəlif növ məmulatların emalı dəyərləri haqqında dəqiq məlumatların təyin edilməsi zamanı müəyyən praktiki çətinliklər qarşıya çıxır. Müvafiq məsələlərdə məmulatların ümumi emalı dəyərini deyil, eyni (2.65) – (2.68) şərtləri daxilində avadanlıqların ümumi yüklənməsi vaxtını minimumlaşdırmaq daha məsləhətdir. Bu zaman məqsəd funksiyası

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \min$$

şəklində seçilir.

Qeyd 2.3. Verilmiş istehsal planlarının yerinə yetirilməsi şərtləri daxilində məmulatların ümumi emalı dəyəri və avadanlıqların ümumi yüklənməsi vaxtının minimumlaşdırılması məqsəd funksiyaları ilə yanaşı, həmçinin avadanlıqların məhdud iş vaxtı fondları nəzərə alınmaqla, məhsul buraxılışının maksimumlaşdırılması məsələsi də vacib praktiki əhəmiyyət kəsb edir. Müvafiq məsələdə optimallıq meyarları olaraq masimum dəyərə malik məhsul buraxılışı, maksimum ümumi mənfəət yaxud məhsul istehsalının verilmiş quruluşu nəzərə alınmaqla maksimum miqdarda komplekt məhsul buraxılışı seçilə bilərlər. Aydındır ki, hər bir halda baxılan məsələnin iqtisadi mahiyyətindən asılı olaraq, onun riyazi qoyuluşunda da zəruri dəyişiklikləri etmək tələb olunur.

Beləliklə, biz XP-nin bir neçə sadə iqtisadi məsələlərini nəzərdən keçirdik. Onları ümumiləşdirməklə, aşağıdakı nəticələrə gəlmək olar.

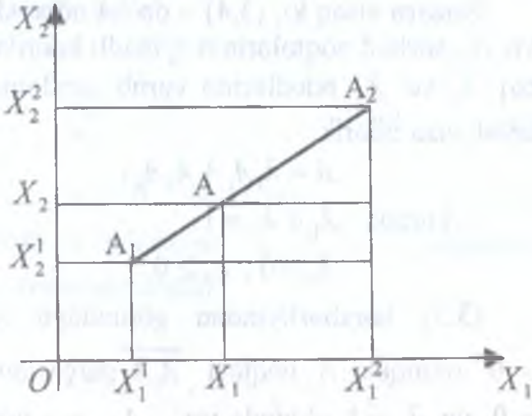
1. XP məsələsinin məqsəd funksiyası üçün həm maksimum, həm də minimum qiymət axtarıla bilər.
2. XP məsələsində məhdudiyyət şərtləri həm bərabərliklər (tənliklər), həm də bərabərsizliklər şəklində ifadə edilə bilərlər.
3. İqtisadi məna kəsb edən hər bir XP məsələsinin bütün məchulları mənfi ola bilməzlər.
4. İstənilən XP məsələsindən uyğun əsas (kanonik) məsələyə keçmək mümkündür və əksinə.

Mövzu 3. XP MƏSƏLƏSİNİN HƏLLƏRİNİN XASSƏLƏRİ

3.1. Nöqtələrin qabarıq xətti kombinasiyası

Qabarıq çoxluqların və xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllərinin fundamental xassələrinin əsaslandırılmasında nöqtələrin qabarıq xətti kombinasiyası anlayışı mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Ona görə də n – ölçülü Evklid fəzasında (E_n) bu anlayışın müvafiq analitik təriflərini nəzərdən keçirək.

n = 2 olan hala baxaq. Tutaq ki, X_1OX_2 düzbucaqlı koordinat sistemində $A_1(X_1^1, X_2^1)$ və $A_2(X_1^2, X_2^2)$ nöqtələri verilmişdir. Onlar istiqamətlənmiş $\overline{A_1A_2}$ parçasını təyin edirlər (şəkil 3.1). Verilmiş parçanın ixtiyari A (X_1, X_2) nöqtəsinin koordinatlarını onun sərhəd nöqtələrinin koordinatları ilə ifadə edək.



Şəkil 3.1

$\overline{A_1A}$ və $\overline{A_1A_2}$ parçaları nəinki eyni istiqamətə malikdirlər, həm də üst-üstə düşürlər. Ona görə də alırıq:

$$\overline{A_1A} = t \cdot \overline{A_1A_2}\,, \text{ burada } 0 \le t \le 1 \tag{3.1}$$

$$\overline{A_1A} = (X_1 - X_1^1, X_2 - X_2^1) \text{ və } \overline{A_1A_2} = (X_1^2 - X_1^1, X_2^2 - X_2^1)$$

olduğundan, (3.1) tənliyinin koordinatlarla yazılışı aşağıdakı kimi olur:

$$\begin{cases} X_1 - X_1^1 = t\cdot(X_1^2 - X_1^1), \\ X_2 - X_2^1 = t\cdot(X_2^2 - X_2^1). \end{cases} \tag{3.2}$$

(3.2) sistemində çevirmə aparsaq alarıq:

$$\begin{cases} X_1 = (1-t)X_1^1 + tX_1^2, \\ X_2 = (1-t)X_2^1 + tX_2^2. \end{cases} \tag{3.3}$$

$\lambda_1 = 1 - t$, $\lambda_2 = t$ işarələrini daxil etsək, onda $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ və $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ olar.

Bu zaman (3.3) sistemini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\begin{cases} X_1 = \lambda_1 X_1^1 + \lambda_2 X_1^2, \\ X_2 = \lambda_1 X_2^1 + \lambda_2 X_2^2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Nəzərə alsaq ki, (3.4) – də A nöqtəsinin koordinatları A_1 və A_2, sərhəd nöqtələrinin eyniadlı koordinatlarını müvafiq olaraq λ_1 və λ_2 ədədlərinə vurub cəmləməklə alınır, onda nəhayət yaza bilərik:

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \tag{3.5}$$

burada $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, (3.6)

$$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0. \tag{3.7}$$

(3.5) bərabərliyindən göründüyü kimi $\lambda_1 = 1$ və $\lambda_2 = 0$ olduqda A nöqtəsi $\overline{A_1A_2}$ parçasının A_1 başlanğıcı, $\lambda_1 = 0$ və $\lambda_2 = 1$ olduqda isə A_2 son nöqtəsi ilə üst-üstə düşür.

A_1 və A_2 sərhəd nöqtələri $\overline{A_1A_2}$ parçasının həmçinin kənar yaxud təpə nöqtələri də adlanır. (3.5) və (3.6) şərtlərini ödəyən $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ qiymətlərində (yəni əgər $0 < t < 1$ olarsa), A verilmiş parçanın daxili nöqtəsi olur.

Beləliklə, $\overline{A_1A_2}$ parçasını (3.5) – (3.7) şərtlərini ödəyən nöqtələrin çoxluğu kimi təyin etmək olar.

Tərif 3.1. (3.5) – (3.7) şərtləri ödənildikdə A nöqtəsinə A_1 və A_2 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası deyilir.

Tərif 3.1 - dən göründüyü kimi, kənar (təpə) nöqtə parçanın digər iki nöqtəsinin qabarıq xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilməz.

Qeyd edək ki, tərif 3.1 həmçinin bir neçə nöqtə və istənilən ölçüyə malik fəza verilən halda da doğrudur. Misal üçün n – olcülü fəzada m sayda nöqtələrin verildiyi hala baxaq. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nöqtələri aşağıdakı kimi ifadə ediləcəkdir:

$$A_1 = (X_1^1, X_2^1, \ldots, X_n^1), A_2 = (X_1^2, X_2^2, \ldots, X_n^2), \ldots, A_m = (X_1^m, X_2^m, \ldots, X_n^m).$$

Beləliklə, nöqtələrin qabarıq xətti kombinasiyasının tərifini ümumiləşdirmək olar.

Tərif 3.2. Fərz edək ki, E_n Evklid fəzasında $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ixtiyari nöqtələri verilmişdir.

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_m A_m, \qquad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \qquad (3.9)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (3.10)$$

şərtləri ödənildikdə A nöqtəsinə $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nöqtələrinin qabarıq xətt kombinasiyası deyilir.

Misal 3.1. Əgər

$$\text{a) } \lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{1}{5}, \lambda_3 = \frac{2}{15};$$

$$\text{b) } \lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{5}, \lambda_3 = \frac{1}{10};$$

$$\text{v) } \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{4}, \lambda_3 = \frac{3}{4}.$$

verilərsə, onda A nöqtəsi A_1, A_2, A_3 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası ola bilərmi?

Həlli

Tərif 3.2.-yə əsasən aşağıdakı şərtlər ödənilməlidir:

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0.$$

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = 1$ və bütün $\lambda_i > 0 \quad (i = 1,2,3)$ olduğu üçün,

$A = \frac{2}{3} A_1 + \frac{1}{5} A_2 + \frac{2}{15} A_3$ ifadəsi A_1, A_2 və A_3 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyasıdır.

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{11}{20} \neq 1$ olduğundan, bütün $\lambda_i > 0 \quad (i = 1,2,3)$ ödənsə də, $A = \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{5} A_2 + \frac{1}{10} A_3$ ifadəsi A_1, A_2 və A_3 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası deyildir.

v) Baxmayaraq ki, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ödənir, lakın $A = \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{4} A_2 + \frac{3}{4} A_3$ ifadəsi A_1, A_2 və A_3 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası ola bilməz. Belə ki, $\lambda_2 = -\frac{1}{4} < 0$.

Cavab : a) - hə; b) - yox; v) – yox.

3.2. Qabarıq çoxluqlar və onların xassələri

Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri də **qabarıq çoxluq** anlayışıdır ki, bu da onun nəzəri əsaslarının baxılması zamanı xüsusi maraq kəsb edir. Ona görə də müvafiq anlayışın analitik tərifini verək.

Orta məktəbin riyaziyyat fənnində çoxbucaqlılar öz tərəflərinin yerləşdiyi düz xətlərdən bütövlüklə bir tərəfdə qaldığı üçün qabarıq adlanırlar. Bununla bərabər qabarıq çoxbucaqlını qabarıq olmayan çoxbucaqlıdan fərqləndirən **ümumi təyinedici xassə** ondan ibarətdir ki, əgər qabarıq çoxbucaqlının istənilən iki nöqtəsini götürək və onları düz xətt parçası ilə birləşdirsək, onda bu parça tamamilə çoxbucaqlıya daxil olacaqdır. Məhz bu xassənin əsasında qabarıq çoxluğun cəbri və həndəsi təriflərini söyləmək olar.

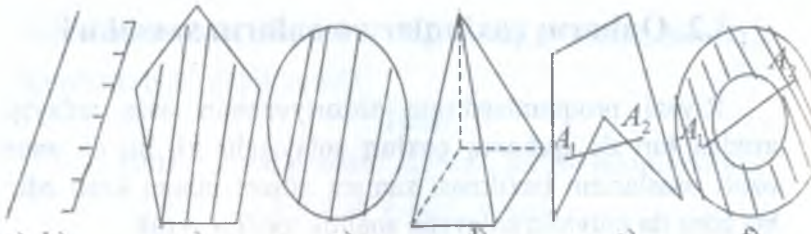
Tərif 3.3 (cəbri). Verilmiş çoxluğun ixtiyari iki nöqtəsinin istənilən qabarıq xətti kombinasiyası olan nöqtə də həmin çoxluğa daxil olarsa, ona qabarıq çoxluq deyilir.

Tərif 3.4 (həndəsi). Çoxluğun ixtiyari iki nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçası da tamamilə həmin çoxluğa daxil olarsa, ona qabarıq çoxluq deyilir.

Qabarıq çoxluqlara misal olaraq düz xətt parçasını, düz xətti, yarımmüstəvini, dairəni, kürəni, kubu, yarımfəzanı və s. göstərmək olar. Şəkil 3.2 - də a), b), v), q), d) – qabarıq çoxluqlar, lakin e), f) isə qabarıq olmayan çoxluqlardır. Belə ki, burada $\overline{A_1 A_2}$ düz xətt parçası həm e), həm də f) çoxluğuna tamamilə daxil deyildir.

Beləliklə, qabarıq çoxluqlar yalnız çoxbucaqlılardan ibarət olmaya da bilər.

Qabarıq çoxluqların nöqtələri içərisində daxili, sərhəd və kənar (yaxud təpə) nöqtələri fərqləndirmək lazımdır.



a) b) v) q) d) e) f)

Şəkil 3.2

Əgər çoxluğun nöqtəsinin istənilən ətrafına[1] yalnız həmin çoxluğun nöqtələri daxil olarsa, ona **daxili nöqtə** deyilir.

Əgər çoxluğun nöqtəsinin istənilən ətrafında həm bu çoxluğa daxil olan, həm də daxil olmayan nöqtələr vardırsa, ona **sərhəd nöqtəsi** deyilir. Qeyd edək ki, çoxluğun sərhəd nöqtələri onun sərhədini təşkil edir.

Riyazi proqramlaşdırma nəzəriyyəsində, xüsusilə də XP məsələsinin həlli zamanı kənar nöqtələr mühüm əhəmiyyət kəsb edirlər.

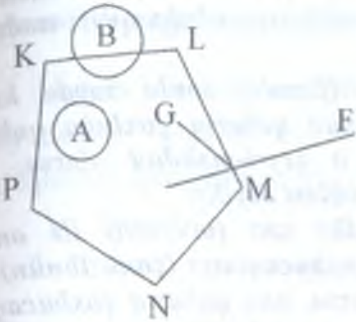
Əgər çoxluğun nöqtəsi bütövlüklə bu çoxluğa daxil olan heç bir parçanın daxili nöqtəsi olmazsa, ona **kənar (təpə) nöqtə** deyilir. Başqa sözlə desək, qabarıq çoxluğun kənar nöqtəsi onun ixtiyari iki nöqtəsinin qabarıq xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilməz.

Şəkil 3.3-də qabarıq çoxluğun müxtəlif növ nöqtələrinə aid misallar göstərilmişdir.

Burada *A* –daxili nöqtə; *B* – sərhəd nöqtəsi, *K, L, M, N, P* – kənar nöqtələrdir. Məsələn, *M* – kənar nöqtədir, belə ki, bütövlüklə çoxbucaqlıya daxil olan istənilən parça (*GM*) üçün o daxili nöqtə deyildir.

---

[1] Müstəvi (fəza) nöqtəsinin ətrafı dedikdə, mərkəzi bu nöqtədə olmaqla kifayət qədər kiçik radiusa malik olan çevrə (kürə) başa düşülür.



Şəkil 3.3

Şəkil 3.4

Bununla bərabər M – nöqtəsi EF parçası üçün daxili nöqtə olsa da, bu parça verilmiş çoxbucaqlıya bütövlüklə daxil deyildir.

Qabarıq çoxbucaqlı sonlu və sonsuz sayda kənar nöqtələrə malik ola bilər. Əgər çoxluq yalnız düz xəttlər yaxud parçalarla məhdud olarsa, onun kənar nöqtələrinin sayı sonludur, çoxluğun sərhədi əyrixətli olan halda isə o sonsuz sayda kənar nöqtələrə malikdir. Məsələn, dairənin kənar nöqtələri onun çevrəsinin nöqtələrindən ibarətdir və aydındır ki, onların sayı sonsuzdur. Bununla bərabər düz xətt, müstəvi, yarımmüstəvi, fəza, yarımfəzanın kənar nöqtələri yoxdur.

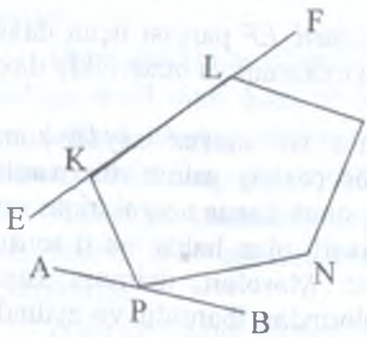
Qeyd edək ki, qabarıq çoxluqlarda kənar nöqtələr həmişə onların təpə nöqtələri ilə üst-üstə düşürlər, qabarıq olmayan çoxluqlarda isə bu belə olmaya da bilər. Məsələn, şəkil 3.4-də K nöqtəsi qabarıq olmayan çoxbucaqlının təpə nöqtəsi olsa da, o kənar nöqtə deyildir. Belə ki, bu nöqtə bütövlüklə çoxbucaqlıya daxil olan AB parçasının daxili nöqtəsidir.

Əgər çoxluq bütün kənar nöqtələrini özündə saxlayarsa, ona **qapalı çoxluq** deyilir. Qapalı çoxluq məhdud və qeyri-məhdud ola bilər.

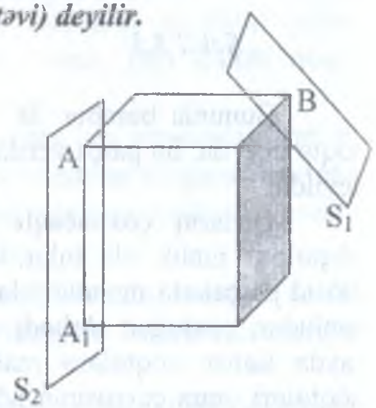
Əgər çoxluğun istənilən nöqtəsində mərkəzi olmaqla sonlu radiusa malık elə kürə qurmaq mümkündürsə ki, verilmiş çoxluq tamamilə buraya daxil olsun, ona **məhdud çoxluq** deyilir. Əks halda isə verilmiş çoxluğa **qeyri-məhdud çoxluq** deyilir.

Tərif 3.5. Müstəvidə (fəzada) sonlu sayda kənar nöqtələrə malik qapalı məhdud qabarıq çoxluğa qabarıq çoxbucaqlı (çoxüzlü), əgər o qeyri-məhdud olarsa, ona qabarıq çoxbucaqlı (çoxüzlü) oblast deyilir.

Tərif 3.6. Verilmiş düz xətt (müstəvi) ilə ondan bütövlüklə bir tərəfdə qalan çoxbucaqlının (çoxüzlünün) heç olmazsa bir ortaq nöqtəsi olarsa, ona qabarıq çoxbucaqlıya (çoxüzlüyə) dayaq düz xətt (müstəvi) deyilir.



Şəkil 3.5



Şəkil 3.6

Şəkil 3.5 - də AB və EF düz xətləri $KLMNP$ çoxbucaqlısına uyğun olaraq P kənar nöqtəsində və KL tərəfi üzrə dayaqdırlar.

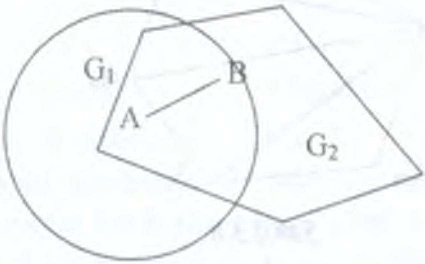
Şəkil 3.6 - da isə S_1 və S_2 müstəviləri çoxüzlüyə uyğun olaraq B kənar nöqtəsində və AA_1 üzü boyunca dayaqdırlar.

Qabarıq çoxluqların digər mühüm xassəsi onların kəsişməsi ilə əlaqədardır.

İki (yaxud bir neçə) çoxluğun ümumi hissəsinə həmin **çoxluqların kəsişməsi** deyilir.

Teorem 3.1. İstənilən sayda qabarıq çoxluqların kəsişməsi də qabarıq çoxluqdur.

İsbatı. Teoremin isbatı üçün iki çoxluq olan hal ilə kifayətlənək. Tutaq ki, A *və* B verilmiş G_1 və G_2 qabarıq çoxluqlarının kəsişməsinin ixtiyari iki nöqtəsidir (bax.şəkil 3.7).



Şəkil 3.7

A və B nöqtələri çoxluqların kəsişməsinə aid olduğundan, onlar eyni zamanda həm G_1, həm də G_2 çoxluğuna daxildirlər. Qabarıq çoxluğun həndəsi tərifinə əsasən $\overline{AB}$ parçasının bütün nöqtələri də həm G_1, həm də G_2 çoxluğuna, yəni onların kəsişməsinə aid olmalıdırlar. Deməli, verilmiş çoxluqların kəsişməsi də qabarıq çoxluqdur.Teorem isbat edildi.

Qabarıq çoxluqların aşağıdakı teoremlə müəyyən edilən xassəsi də xüsusi maraq kəsb edir.

Teorem 3.2. Qabarıq çoxbucaqlı (çoxüzlü) öz kənar (təpə) nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyasından ibarətdir.

çoxbucaqlı və çoxüzlü oblastlar, qeyri-məhdud çoxluqlar olduqları üçün, öz kənar nöqtələri ilə birqiymətli təyin edilmirlər. Belə ki, onlardan hər birinin istənilən nöqtəsini onun kənar nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olmaz.

Misal 3.2. $A_1\ (2; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -3)$, $A_2\ (-1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 1)$ ***və*** $A_3\ (4; 2; \frac{1}{2}; -3)$ ***nöqtələri verilmişdir.*** A_1, A_2 ***və*** A_3 ***nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası olan*** $A\,(X_1; X_2; X_3; X_4)$ ***nöqtəsini tapın.***

Həlli

Cəbri tərifə əsasən A nöqtəsi o halda A_1, A_2 və A_3 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası olar ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3\,,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\,,$$

$$\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0\,.$$

Əvvəlcə A_2 və A_3 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası olan $B\,(\overline{X_1}; \overline{X_2}; \overline{X_3}; \overline{X_4})$ nöqtəsini tapaq. Onda aşağıdakı şərtlər ödənməlidir:

$$B = t_3 A_2 + t_4 A_3\,,$$

burada $t_3 + t_4 = 1\,,$

$$t_3 \ge 0, t_4 \ge 0\,.$$

$t_3 + t_4 = 1$ olduğundan $t_4 = 1 - t_3$. Məsələn, tutaq ki, $t_3 = \frac{3}{4}$, onda $t_4 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Aydındır ki, B nöqtəsinin koordinatları aşağıdakı münasibətdən tapılır:

$$(\overline{X_1}; \overline{X_2}; \overline{X_3}; \overline{X_4}) = \frac{3}{4}(-1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 1) + \frac{1}{4}(4; 2; \frac{1}{2}; -$$

Buradan alırıq $(\overline{X_1}; \overline{X_2}; \overline{X_3}; \overline{X_4}) = (\frac{1}{4}; 1; \frac{1}{2}; 0)$.

Daha sonra alırıq

$$A = t_1 A_1 + t_2 B,$$

burada $\quad t_1 + t_2 = 1,$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0.$$

Tutaq ki, $t_1 = \frac{1}{3}$, onda $t_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Deməli,

$$(X_1; X_2; X_3; X_4) = \frac{1}{3} \cdot (2; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -3) + \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{4}; 1; \frac{1}{2}; 0).$$

Sonuncu münasibətdən təyin edirik

$$(X_1; X_2; X_3; X_4) = \left(\frac{5}{6}; \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; -1\right).$$

$$\lambda_1 = t_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = t_2 t_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = t_2 t_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

nəzərə alsaq, nəticədə $A = \frac{1}{3} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{6} A_3$ olur.

Cavab: $A \left(\frac{5}{6}; \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

3.3. XP məsələsinin həllərinin xassələri

Yuxarıda XP-nin müxtəlif növ məsələlərinə baxılmışdır. Onlardan hər hansı biri ümumi, əsas və simmetrik məsələ şəklində göstərilə bilər.

XP məsələsinin həllərinin xassələrini əsaslandırmaq üçün XP-nin əsas məsələsinin vektor və matris şəklində yazılış formalarından istifadə edəcəyik.

Teorem 3.3. XP məsələsinin bütün həllər çoxluğu qabarıq çoxluqdur.

İsbatı. Fərz edək ki, X^1 və X^2 (2.11) – (2.13) XP məsələsinin ixtiyari iki həllidir. X^1 və X^2-nin istənilən qabarıq xətti kombinasiyasını tərtib edək:

$$X = \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2, \qquad (3.24)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad (3.25)$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0. \qquad (3.26)$$

İsbat edək ki, X da həmçinin verilmiş XP məsələsinin mümkün həllidir. Doğrudan da X^1 və X^2- məsələnin mümkün həlləri olduğundan, onlar (2.12), (2.13) şərtlərini ödəyirlər və müvafiq olaraq yaza bilərik:

$$AX^1 = A_o, \qquad AX^2 = A_o,$$

$$X^1 \geq 0. \qquad X^2 \geq 0.$$

Onda $AX = A(\lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2) = \lambda_1 AX^1 + \lambda_2 AX^2 =$

$$= \lambda_1 A_o + \lambda_2 A_o = (\lambda_1 + \lambda_2) A_o = A_o,$$

yəni $AX = A_o$. (3.27)

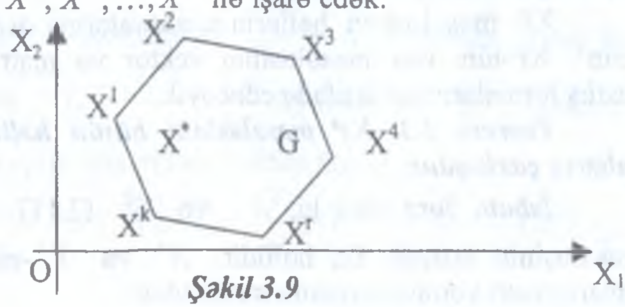
$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ və $X^1 \geq 0, X^2 \geq 0$ şərtlərini nəzərə alsaq, onda (3.24) münasibətindən alırıq:

$$X \geq 0. \qquad (3.28)$$

Beləliklə, X üçün (3.27) və (3.28) oxşar şərtləri ödənilir. Onda X da (2.11) – (2.13) XP məsələsinin mümkün həllidir. Teorem isbat olundu.

Teorem 3.4. XP məsələsinin məqsəd funksiyası öz ekstremum qiymətini həllər çoxbucaqlısının (çoxüzlüsünün) kənar nöqtələrindən birində alır.

İsbatı. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, (2.11) – (2.13) «max» XP məsələsidir, onun həllər çoxluğu isə məhdud G çoxbucaqlısından ibarətdir (bax şəkil 3.9). Onun kənar nöqtələrini $X^1, X^2, \ldots, X^k$ ilə işarə edək.



Şəkil 3.9

Tutaq ki, X^* - məsələnin optimal həllidir. Onda $\forall X \in G$ üçün $Z(X^*) \geq Z(X)$ ödənilir. Burada aşağıdakı iki hal mümkündür:

1-ci hal. X^* - G çoxbucaqlısının kənar nöqtəsidir, onda teorem isbat olunur.

2-ci hal. Fərz edək ki, X^* kənar nöqtə deyildir. Onda teorem 3.2 əsasında onu G çoxbucaqlısının kənar nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olar:

$$X^* = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r X^r, \qquad (3.29)$$

$$\sum_{r=1}^{k} \lambda_r = 1, \qquad (3.30)$$

$$\lambda_r \geq 0, \ (r = \overline{1,k}) \qquad (3.31)$$

Z(X) – xətti funksiya olduğu üçün alırıq:

$$Z(X^*) = PX^* = P\sum_{r=1}^{k} \lambda_r X^r = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r PX^r = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r Z(X^r). \qquad (3.32)$$

$Z(X^r)$ qiymətləri içərisində ən böyüyünü tapaq. Tutaq ki, o çoxbucaqlının X^s kənar nöqtəsində alınır, yəni

$$\max_r \{Z(X^r)\} = Z(X^s), \ (1 \leq s \leq k).$$

$Z(X^s) = M$ işarələməsini daxil edək və (3.32) ayırılışında hər bir $Z(X^r)$ qiymətini bu ən böyük M ədədi ilə əvəz edək. Onda (3.30) və (3.31) şərtlərini nəzərə almaqla,

$$Z(X^*) \leq M\sum_{r=1}^{k} \lambda_r = M \text{ olur.}$$

Fərziyyəmizə görə X^* - optimal həlldir, ona görə də bir tərəfdən

$$Z(X^*) \geq Z(X^s) = M \qquad (3.33)$$

ödənilir.

Digər tərəfdən isə isbat olundu ki,

$$Z(X^*) \leq M. \qquad (3.34)$$

Aydındır ki, (3.33) və (3.34) bərabərsizliklərindən alırıq

$$Z(X^*) = M = Z(X^s),$$

burada $X^s - G$ həllər çoxbucaqlısının kənar nöqtəsidir.

Beləliklə, isbat etdik ki, elə X^s kənar nöqtəsi vardır ki, burada XP məsələsinin məqsəd funksiyası öz maksimum qiymətini alır, yəni $Z_{\max}(X) = Z(X^s)$. Teorem isbat olundu.

Teorem 3.5. Əgər XP məsələsinin məqsəd funksiyası birdən çox kənar nöqtələrdə ekstremum qiymət alırsa, onda həmin nöqtələrin ixtiyari qabarıq xətti kombinasiyası olan nöqtədə də funksiya ekstremum qiymət alır.

İsbatı. Fərz edək ki, $Z(X)$ öz maksimum qiymətini həllər çoxbucaqlısının (çoxüzlüsünün) birdən çox kənar nöqtələrində, məsələn, $X^1, X^2, ..., X^q$ $(1 < q \le k)$ nöqtələrində alır. Yəni,

$$Z_{\max}(X) = Z(X^1) = Z(X^2) = ... = Z(X^q) = M. \qquad (3.35)$$

Tutaq ki, X^* - bu kənar nöqtələrin istənilən qabarıq xətti kombinasiyasıdır:

$$X^* = \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + ... + \lambda_q X^q, \qquad (3.36)$$

$$\sum_{r=1}^{q} \lambda_r = 1, \qquad (3.37)$$

$$\lambda_r \ge 0, \quad (r = \overline{1,q}) \qquad (3.38)$$

Z(X) – xətti funksiya olduğundan, alırıq:

$$Z(X^*) = Z(\lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + ... + \lambda_q X^q) =$$

$$= \lambda_1 Z(X^1) + \lambda_2 Z(X^2) + ... + \lambda_q Z(X^q). \qquad (3.39)$$

(3.35) və (3.37) – ni nəzərə almaqla (3.39) - dan yaza bilərik.

$$Z(X^*) = \lambda_1 M + \lambda_2 M + ... + \lambda_q M = M \sum_{r=1}^{q} \lambda_r = M,$$

$$\text{yəni} \quad Z_{\max}(X) = Z(X^*) = M. \qquad (3.40)$$

(3.40) - dan göründüyü kimi, XP məsələsinin $Z(X)$ məqsəd funksiyası $X^1, X^2, ..., X^q$ kənar nöqtələrinin ixtiyari qabarıq xətti kombinasiyası olan X^* nöqtəsində də maksimum qiymət alır. Teorem isbat olundu.

Qeyd 3.1. Teoremdə həllər çoxluğunun məhdud olması tələbi vacibdir. Belə ki, əgər o qeyri-məhdud oblastdan ibarət olarsa, onda teorem 3.2 - də göstərildiyi kimi, oblastın heç də hər bir nöqtəsini onun kənar nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olmaz.

3.4. XP məsələsinin dayaq həlli və həllər çoxluğunun kənar nöqtəsinin qarşılıqlı əlaqəsi

XP məsələsinin dayaq həlləri və onun mümkün həllər çoxluğunun kənar nöqtələri arasında qarşılıqlı əlaqə mövcuddur ki, bu da aşağıdakı teoremlərin isbatı və onlardan alınmış nəticələrlə təsdiq edilir.

Teorem 3.6. XP məsələsinin hər bir dayaq həllinə onun həllər çoxluğunun kənar nöqtəsi uyğundur.

İsbatı. XP – nin əsas məsələsinin (2.8) – (2.10) vektor şəklində yazılışına baxaq. Tutaq ki, $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0\right)$ - onun dayaq həllidir. Burada ilk m sayda komponentlər - əsas dəyişənlər, yerdə qalan $n - m$ sayda komponentlər isə – əsas olmayan dəyişənlər olub sıfra bərabərdirlər. Əgər həlldə ardıcıllıq belə olmazsa, onda dəyişənləri yenidən nömrələmək olar.

İsbat edək ki, X^0 dayaq həllinə XP məsələsinin həllər çoxluğunun kənar nöqtəsi uyğundur.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, X^0 - kənar nöqtə deyildir. Onda X^0 - ı həllər çoxluğunun, X^0 ilə üst-üstə düşməyən, digər iki X^1 və X^2 nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası şəklində göstərmək olar, yəni

$$X^0 = \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

burada $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ olduğu fərz edilir. Belə ki, $\lambda_1 = 0$ yaxud $\lambda_2 = 0$ olan halda X^0 nöqtəsi uyğun olaraq X^2 nöqtəsi yaxud X^1 nöqtəsi ilə üçt-üçtə düşür.

Beləliklə, X^0 nöqtəsinin n - m koordinatları sıfra bərabər olduğu üçün X^1 və X^2 nöqtələrinin sonuncu n - m koordinatları da həmçinin sıfra bərabər olacaqdır, yəni

$$X^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1, 0, \ldots, 0) \text{ və } X^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2, 0, \ldots, 0).$$

X^1 və X^2 -ni (2.9) məhdudiyyət şərtlərində yerinə yazsaq, uyğun olaraq alarıq:

$$A_1 x_1^1 + A_2 x_2^1 + \ldots + A_m x_m^1 = A_0, \quad (3.41)$$

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_m x_m^2 = A_0. \quad (3.42)$$

(3.41) bərabərliyindən (3.42) – ni çıxaq:

$$A_1(x_1^1 - x_1^2) + A_2(x_2^1 - x_2^2) + \ldots + A_m(x_m^1 - x_m^2) = \theta, \quad (3.43)$$

burada $\theta = (0,0,\ldots,0)$ m – **ölçülü sıfır vektordur**.

X^0 - dayaq həll olduğundan, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ - vektorları sistemi xətti asılı deyildir[1] və (3.43) bərabərliyi yalnız o

---

[1] ***Tərif***. Əgər hamısı eyni zamanda sıfra bərabər olmayan elə $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ədədləri seçmək mümkündürsə ki,

$$l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_m A_m = \theta$$

ödənilsin, onda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vektorları sisteminə **xətti asılı sistem** deyilir. Əks halda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vektorları sisteminə **xətti asılı olmayan sistem deyilir**.

vaxt ödənilə bilər ki, bu vektorların bütün əmsalları sıfra bərabər olsun, yəni

$$x_1^1 - x_1^2 = 0, x_2^1 - x_2^2 = 0, \ldots, x_m^1 - x_m^2 = 0. \qquad (3.44)$$

(3.44) - dən alırıq ki, $x_1^1 = x_1^2, x_2^1 = x_2^2, \ldots, x_m^1 = x_m^2$.

Beləliklə, X^1, X^2 nöqtələri üst-üstə düşür və $X^1 = X^2$. Deməli, X^0 nöqtəsi çoxluğun digər ixtiyari iki nöqtəsinin qabarıq xətti kombinasiyası deyildir. Bu isə bizim fərziyyəmizə ziddir. Daha doğrusu, X^0- XP məsələsinin həllər çoxluğunun kənar nöqtəsidir. Teorem isbat olundu.

Teorem 3.7. XP məsələsinin həllər çoxluğunun hər bir kənar nöqtəsinə onun dayaq həlli uyğundur.

İsbatı. Tutaq ki, $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$ - XP məsələsinin həllər çoxluğunun kənar nöqtəsidir və onun ilk m sayda koordinatları müsbətdir, yəni $x_j^0 > 0 \quad (j = \overline{1,m})$. İsbat edək ki, X^0 məsələnin dayaq həllidir.

Aşağıdakı iki hala baxaq:

I hal. Əgər $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ məchullarına uyğun $A_1, A_2, \ldots, A_m$ vektorları sistemi xətti asılı olmazsa, onda bu vektorların komponentlərindən ibarət A matrisinin r ranqı m ədədinə bərabər olacaqdır, yəni $|A| \neq 0$. Deməli, $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ əsas məchullardır, $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$ - isə XP məsələsinin dayaq həllidir. Teorem isbat olundu.

II hal. Əksini fərz edək, yəni $A_1, A_2, \ldots, A_m$ vektorları sistemi xətti asılıdır. Onda hamısı sıfra bərabər olmayan elə $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ədədləri vardır ki, onlar aşağıdakı bərabərliyi ödəyirlər

$$l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_m A_m = \theta. \qquad (3.45)$$

X^0 - mümkün həll olduğundan

$$A_1x_1^0 + A_2x_2^0 + \ldots + A_mx_m^0 = A_0. \qquad (3.46)$$

(3.45) münasibətinin hər iki tərəfini ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə vuraq. Nəticəni (3.46) bərabərliyinin hər iki tərəfinə əvvəlcə əlavə edək və sonra isə çıxaq. Onda aşağıdakı müvafiq bərabərlikləri alarıq:

$$A_1(x_1^0 + \varepsilon l_1) + A_2(x_2^0 + \varepsilon l_2) + \ldots + A_m(x_m^0 + \varepsilon l_m) = A_0, \quad (3.47)$$

$$A_1(x_1^0 - \varepsilon l_1) + A_2(x_2^0 - \varepsilon l_2) + \ldots + A_m(x_m^0 - \varepsilon l_m) = A_0, \quad (3.48)$$

(3.47) və (3.48) göstərirlər ki,

$$X_1^0 = (x_1^0 + \varepsilon l_1, x_2^0 + \varepsilon l_2, \ldots, x_m^0 + \varepsilon l_m, 0, \ldots, 0),$$

$$X_2^0 = (x_1^0 - \varepsilon l_1, x_2^0 - \varepsilon l_2, \ldots, x_m^0 - \varepsilon l_m, 0, \ldots, 0)$$

vektorları (2.9) tənliklər sisteminin həllidir. Bununla bərabər, onlar XP məsələsinin mümkün həlləri olmaya da bilərlər.

Bütün $x_j^0 > 0$ $(j = \overline{1, m})$ olduğundan ε ədədini olduqca elə kiçik seçmək olar ki, X_1^0 və X_2^0 - ların ilk m komponentlərinin hamısı müsbət olsun, yəni $x_j^0 + \varepsilon l_j > 0$ $(j = \overline{1, m})$. ε ədədini belə seçdikdə X_1^0 və X_2^0 vektorları XP məsələsinin mümkün həlləri olurlar. Asanlıqla görmək olar ki, $X^0 = \frac{1}{2}X_1^0 + \frac{1}{2}X_2^0$, yəni X^0 həlli X_1^0 və X_2^0 vektorlarının qabarıq xətti kombinasiyasından ibarətdir. Bu isə teoremdə verilmiş X^0 - ın kənar nöqtə olması şərtinə aiddir.

Deməli, bizim fərziyyəmiz doğru deyildir və $A_1, A_2, \ldots, A_m$ vektorları sistemi xətti asılı olmayandır. Daha doğrusu, X^0 - XP məsələsinin dayaq həllidir. Teorem isbat olundu.

Beləliklə, yuxarıda isbat olunmuş əsas teoremlərdən aşağıdakı nəticələrə gəlirik:

Nəticə 3.1. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ vektorları m ölçülü olduğundan, XP məsələsinin həllər çoxüzlüsünün kənar nöqtəsi sayı m – dən çox olmayan $x_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ müsbət koordinatlarına malikdir.

Nəticə 3.2. XP məsələsinin həllər çoxüzlüsünün hər bir kənar nöqtəsinə $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sisteminin $k \le m$ sayda xətti asılı olmayan vektorları uyğundur.

Nəticə 3.3. Əgər XP məsələsinin optimal həlli vardısra, onda o məsələnin dayaq həllərindən, heç olmazsa, biri ilə üst-üstə düşür.

Bununla da, istənilən XP məsələsinin həlli üçün prinsipial istiqamət formalaşmış olur. Doğrudan da, əgər həllər çoxüzlüsündə XP məsələsinin məqsəd funksiyası məhduddursa, onda:

1) həllər çoxüzlüsünün elə kənar nöqtəsi vardır ki, burada məqsəd funksiyası öz ekstremum qiymətini alır;

2) hər bir dayaq həll məsələnin həllər çoxüzlüsünün kənar nöqtəsinə uyğundur.

Beləliklə aydın olur ki, XP məsələsinin optimal həllini tapmaq üçün heç də onun sonsuz sayda mümkün həllərini tədqiq etmək zəruri deyildir və bunun əvəzində isə həllər çoxüzlüsünün yalnız sonlu sayda kənar nöqtələrini yoxlamaq kifayətdir.

Mövzu 4. XP MƏSƏLƏSİNİN HƏNDƏSİ İZAHI

4.1. XP məsələsinin məqsəd funksiyasının qiymətinin dəyişməsi

Yuxarıda XP nəzəriyyəsinin əsas teoremləri və onlardan alınmış nəticələr nəzərdən keçirilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, əgər XP məsələsinin optimal həlli vardırsa, o həllər çoxüzlüsünün heç olmazsa bir kənar nöqtəsinə uyğundur və yaxud dayaq həllərdən biri ilə üst-üstə düşür. Ona görə də XP məsələsini həll etmək üçün onun yalnız sonlu sayda dayaq həllərini tədqiq etmək və onların içərisində məqsəd funksiyasına ekstremum qiymət verən dayaq həlli tapmaq kifayətdir. Həndəsi olaraq bu həllər çoxüzlüsünün bütün kənar nöqtələrinin baxılmasını tələb edir ki, onların da içərisində XP məsələsinin optimal həllini təyin etməyə imkan verir. Lakin müvafiq yanaşma, oz növbəsində, müəyyən çətinliklərlə əlaqədardır. Belə ki, hər bir XP məsələsinin dayaq həllərinin sayı sonlu olsa da, onlar həddindən artıq çox ola bilər.

Beləliklə, XP məsələsinin optimal həllinin tapılması probiemi xüsusi maraq kəsb edir və onun müvəffəqiyyətli həlli o halda mümkündür ki, mövcud dayaq həllərin araşdırılması ixtiyari olmaqla yox, məqsəd funksiyasının qiymətlərinin monoton olaraq dəyişməsi nəzərə alınmaqla aparılsın. Müvafiq yanaşma, optimal həllə yaxınlaşmaq nöqteyi-nəzərdən, yalnız zəruri dayaq həllərin yoxlanması üçün şərait yaradır. Bununla əlaqədar olaraq XP məsələsinin məqsəd funksiyasının qiymətlərinin dəyişməz qaldığı ayrı-ayrı mümkün həllər çoxluqlarının təyin olunması mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Doğrudan da x_1 və x_2 məchullarının daxil olduğu aşağıdakı şəkildə ikiölçümü XP məsələsinə baxaq:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = P_1 x_1 + P_2 x_2 \to \max\ (\min), \tag{4.1}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \quad (4.3)$$

Aydındır ki, $Z(X)$ xətti funksiyasının qeyd olunmuş qiymətlərində (4.1) - dən müvafiq düz xəttin tənliyi

$$P_1x_1 + P_2x_2 = const. \quad (4.4)$$

şəklində alınır.

Tərif 4.1. XP məsələsinin məqsəd funksiyası sabit kəmiyyətə bərabər olduqda alınmış tənliyə uyğun düz xəttə səviyyə xətti deyilir.

Qeyd edək ki, səviyyə xəttini çox vaxt XP məsələsinin məqsəd funksiyasının bərabər qiymətlər xətti adlandırırlar. Dəqiq desək, hər bir səviyyə xəttinin bütün nöqtələrində $Z(X)$ funksiyası eyni bir qiymət alır. Aydındır ki, bütün nöqtələrin koordinatları (4.4) tənliyini ödəyirlər. Bununla bərabər bir səviyyə xəttindən digərinə keçdikdə $Z(X)$ məqsəd funksiyasının qiymətlərinin dəyişməsinin tədqiq edilməsi xüsusi maraq kəsb edir.

Məlumdur ki, xətti tənliyin məchullarının əmsalları müvafiq düz xəttə yaxud müstəviyə ***normal vektorun*** koordinatlarıdır. Deməli, (4.4) səviyyə xətlərinin $\overline{N}$ normal vektoru P_1 və P_2 koordinatlarına malikdir, daha doğrusu $\overline{N} = (P_1, P_2)$.

Əgər $Z(x) = 0$ olduqda (4.1) məqsəd funksiyasına uyğun düz xətti təsvir etsək, onda həmin düz xətt O (0;0) koordinat başlanğıcından keçəcəkdir. Bu zaman $Z(X)$ funksiyasınm digər qiymətlərinə uyğun düz xətlər bir-birinə, o cümlədən $Z(X) = 0$ düz xəttinə paralel olacaqdır.

$Z(X)$ məqsəd funksiyasının qiymətlərinin dəyişməsinin tədqiqi aşağıdakı teorem əsasında aparılır.

Teorem 4.1. ***Əgər səviyyə xəttini, onun*** $Z(X)=0$ ***başlanğıc vəziyyətinə paralel qalmaqla, normal vektor istiqamətində hərəkət etdirsək, onda XP məsələsinin məqsəd funksiyasının qiymətləri səviyyə xətləri üzrə artır, ona əks istiqamətdə hərəkət etdirdikdə isə – azalır.***

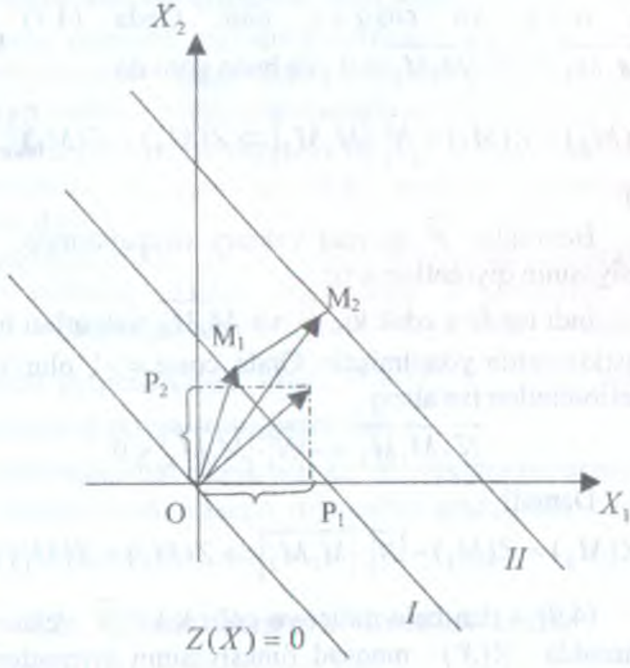
İsbatı. Əvvəla isbat edək ki, səviyyə xəttini öz-özünə paralel qalmaqla $\overrightarrow{N}(P_1,P_2)$ vektoru istiqamətində hərəkət etdirdikdə biz $Z(X)$ funksiyasının kiçik qiymətlərindən böyük qiymətlərinə keçirik. (4.1) – (4.3) XP məsələsi ikiölçülü olduğundan X_1OX_2 düzbucaqlı koordinat sisteminə baxaq (şəkil 4.1). OX_1 və OX_2 koordinat oxları üzərində müvafiq olaraq (4.1) məqsəd funksiyasının P_1 və P_2 əmsalları götürülür. Daha sonra $\overrightarrow{N}=(P_1,P_2)$ normal vektoru və ona perpendikulyar olmaqla, koordinat başlanğıcı O (0;0) nöqtəsindən keçən $Z(X)=0$ düz xətti qurulur və o səviyyə xəttinin başlanğıc vəziyyəti adlanır.

$\overrightarrow{N}$ vektoru istiqamətində və ona perpendikulyar olmaqla $Z(X)=0$ başlanğıc vəziyyətinə paralel daha iki düz xətt keçirək. I səviyyə xətti üzərində $M_1(x_1^1,x_2^1)$, II səviyyə xətti üzərində isə $M_2(x_1^2,x_2^2)$ nöqtələrini elə götürək ki, alınmış $\overline{M_1M_2}$ vektoru $\overrightarrow{N}$ normal vektoruna paralel olsun.

$\overline{OM_1}$ və $\overline{OM_2}$ vektorlarını nəzərdən keçirək. $\overline{OM_2}$ vektoru x_1^2 və x_2^2 koordinatlarına, yəni M_2 nöqtəsinin koordinatlarına, $\overline{OM_1}$ vektoru isə x_1^1 və x_2^1 koordinatlarına, yəni M_1 nöqtəsinin koordinatlarına malikdir.

M_2 nöqtəsində (4.1) məqsəd funksiyasının qiymətini təyin edək:

$$Z(M_2) = P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 = \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \vec{N} \cdot (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1 M_2}) =$$
$$= \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_1} + \vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (4.5)$$



Şəkil 4.1

$Z(M_1) = \vec{N} \cdot \overrightarrow{OM_1}$ olduğundan, (4.5) - dən alırıq:

$$Z(M_2) = Z(M_1) + \vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (4.6)$$

Vektorların skalyar hasilinin tərifinə[1] əsasən

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{M_1 M_2}| \cdot \cos\alpha , \quad (4.7)$$

---

[1] $\vec{A}$ və $\vec{B}$ vektorlarının skalyar hasili bu vektorların uzunluqları ilə onlar arasındakı φ bucağının kosinusu hasilinə bərabərdir, yəni $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\varphi$.

burada α ilə $\overrightarrow{N}$ və $\overline{M_1M_2}$ vektorları arasındakı bucaq işarə edilmişdir.

$\overrightarrow{N}$ və $\overline{M_1M_2}$ vektorlarının istiqamətləri eyni olduğu üçün $\alpha = 0$ və $\cos\alpha = 1$ olur. Onda (4.7) – dən $\overrightarrow{N} \cdot \overline{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right| > 0$ və buna görə də

$$Z(M_2) = Z(M_1) + \left|\overrightarrow{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right| \Rightarrow Z(M_2) > Z(M_1) \qquad (4.8)$$

alırıq.

Beləliklə, $\overrightarrow{N}$ normal vektoru istiqamətində məqsəd funksiyasının qiymətləri artır.

İndi isə fərz edək ki, $\overrightarrow{N}$ və $\overline{M_1M_2}$ vektorları bir-birinə əks istiqamətdə yönəlmişdir. Onda $\cos\alpha = -1$ olur və (4.5) münasibətindən isə alırıq

$$\overrightarrow{N} \cdot \overline{M_1M_2} = -\left|\overrightarrow{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right| < 0.$$

Deməli,

$$Z(M_2) = Z(M_1) - \left|\overrightarrow{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right| \Rightarrow Z(M_2) < Z(M_1). \qquad (4.9)$$

(4.9) – dan belə nəticəyə gəlirik ki, $\overrightarrow{N}$ vektoruna əks istiqamətdə $Z(X)$ məqsəd funksiyasının qiymətləri azalır. Teorem isbat olundu.

Əgər çoxməchullu XP məsələsi verilərsə, məqsəd funksiyasının qiymətlərinin dəyişməsi də oxşar qayda ilə tədqiq edilir. Lakin bu zaman məsələnin kanonik şəkildə yazılışındakı sərbəst məchulların sayı ikidən çox ola bilməz. Daha doğrusu, əgər XP məsələsində məchulların sayı n, asılı olmayan və bərabərlik şəkilində verilmiş məhdudiyyət şərtlərinin sayı m olarsa, onda $n - m \leq 2$ şərti ödənilməlidir.

Verilmiş halda $Z(X) = P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n$ məqsəd funksiyasının eyni qiymət aldığı bütün nöqtələrin koordinatları

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = const \qquad (4.10)$$

tənliyini ödəməlidir.

(4.10) tənliyi həndəsi olaraq n – ölçülü fəzada müştəri müəyyən edir ki, ona da ***səviyyə səthi***, yaxud ***$Z(X)$ məqsəd funksiyasının bərabər qiymətlər səthi deyilir.*** $Z(X)$ məqsəd funksiyasına müxtəlif qiymətlər verməklə bir-birinə paralel olan səviyyə səthləri almış oluruq. Bir daha qeyd edək ki, hər bir səviyyə səthinin bütün nöqtələrində $Z(X)$ funksiyası eyni bir qiymət alır. Bununla bərabər, (4.10) müstəvilərinin hər hansı birindən digərinə keçdikdə məqsəd funksiyasının qiymətləri dəyişir.

Məlumdur ki, (4.10) xətti tənliyində məchulların əmsalları müvafiq (4.10) müstəvisinə, o cümlədən onun koordinat başlanğıcından keçən $Z(X)=0$ başlanğıc vəziyyətinə perpendikulyar olan $\overrightarrow{N}=(P_1,P_2,...,P_n)$ normal vektorunun proyeksiyalarını göstərirlər.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, $\overrightarrow{N}$ vektoru istiqamətində $Z(X)$ məqsəd funksiyasının qiymətləri artır, lakin ona əks istiqamətdə isə – azalır.

4.2. XP məsələsinin həndəsi izahı

Qrafik üsul xətti proqramlaşdırma məsələsinin həndəsi izahına əsaslanır və adətən ikiölçülü, üçölçülü məsələlərin həlli məqsədi ilə tətbiq edilir. Belə ki, ölçüsü üçdən çox olan məsələni həndəsi olaraq təsvir etmək ümumiyyətlə mümkün deyil.

Qeyd 4.1. Xüsusi halda əgər məhdudiyyət şərtləri sistemi n məchullu xətti asılı olmayan m tənliklər sistemindən ibarətdirsə və
$n-m \leq 2$ olarsa, onda müvafiq xətti proqramlaşdırma məsələsini
də qrafik üsulla həll etmək mümkündür.

İkiölçülü halda, daha doğrusu iki dəyişən (x_1 və x_2) daxil olduqda xətti proqramlaşdırma məsələsinə baxaq:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = p_1 x_2 + p_2 x_2 \to \max\ (\min); \qquad (4.11)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (4.12)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \qquad (4.13)$$

(4.11) - (4.13) XP məsələsinin qrafik üsulla həlli prosesi aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir:

I. Məsələnin həllər çoxluğunun (oblastının) təyini. O aşağıdakı altmərhələlərdə yerinə yetirilir:

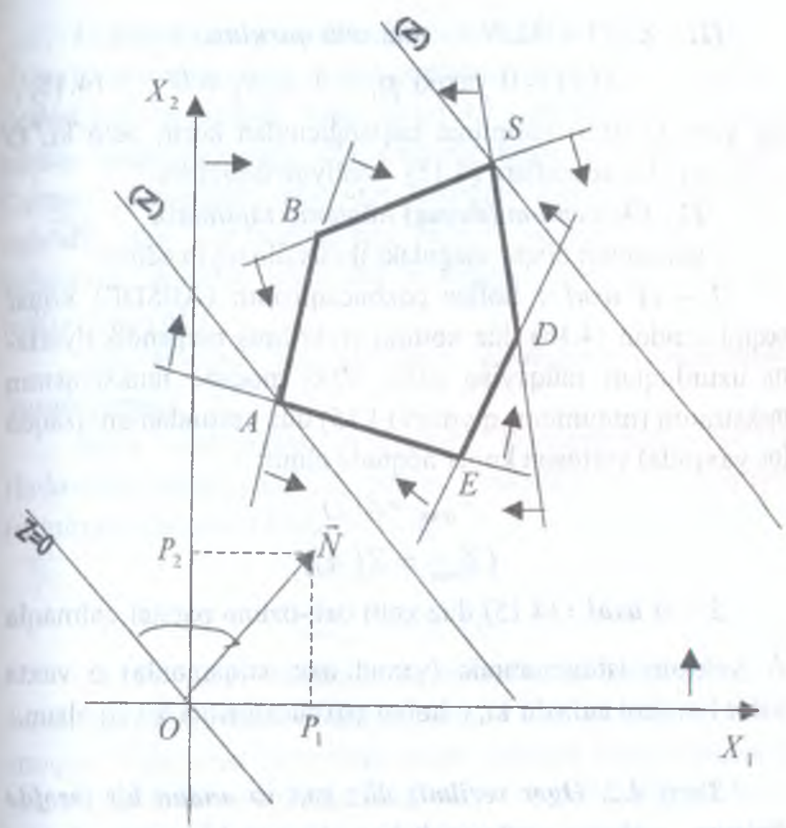
a) (4.12) və (4.13) şərtlərində bərabərsizlik işarələri bərabərlik işarələri ilə əvəz edilir. X_1OX_2 düzbucaqlı koordinat sistemində alınmış tənliklərə uyğun düz xəttlər qurulur. Daha doğrusu tənliklərin həllər çoxluqları təyin edilir:

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 = b_i, \quad (i = \overline{1,m}); \qquad x_1 = 0 \quad \text{və} \quad x_2 = 0 \qquad (4.14)$$

b) məsələnin ayrı-ayrı məhdudiyyət şərtlərinin həllər çoxluğu tapılır. Bunlara (4.14) sərhəd düz xətləri ilə məhdudlaşan yarımmüstəvilər uyğundur ki, onlar da düz xəttlər üzərindəki oxlarla göstərilmişdir (şək. 4.2).

v) alınmış yarımmüstəvilərin ortaq kəsişməsi təyin edilir. Əgər (4.12) və (4.13) sistemləri uyuşandırsa (birgədirsə), onda o qabarıq çoxbucaqlıdan (ABSDE) ibarət olur ki, bu da məsələnin həllər çoxluğunu (oblastını) təşkil edir.

Beləliklə, yarımmüstəvilərin ortaq kəsişməsi ***XP məsələsinin həllər çoxbucaqlısı*** adlanır. O nöqtə, parça, çoxbucaqlı, qeyri-məhdud çoxbucaqlı oblast və s. ola bilər.



Şəkil 4.2.

Tutaq ki, məsələnin həllər çoxbucaqlısı məhduddur.

II. $\vec{N} = (p_1, p_2)$ **vektoru qurulur.**

OX_1 və OX_2 oxları üzərində məqsəd funksiyasının p_1 və p_2 əmsalları müvafiq olaraq götürülməklə, $\vec{N} = (p_1, p_2)$ radius-vektoru qurulur. Bu zaman $Z(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ məqsəd funksiyasının qiymətləri $\vec{N}$ vektoru istiqamətində artır və ona əks olan istiqamətdə isə azalırlar.

III. $Z(x)=0 \perp \vec{N}$ *düz xətti qurulur.*

$$Z(x)=0 \text{ yaxud } p_1x_1+p_2x_2=0 \qquad (4.15)$$

düz xətti O (0;0) koordinat başlanğıcından keçir, belə ki, O nöqtəsinin koordinatları (4.15) tənliyini ödəyirlər.

IV. Ekstremum (dayaq) nöqtənin tapılması.

Ekstremum nöqtə aşağıdakı iki üsulla təyin edilir:

1 - ci üsul : həllər çoxbucaqlısının (ABSDE) kənar nöqtələrindən (4.15) düz xəttinə endirilmiş perpendikulyarların uzunluqları müqayisə edilir. Z(x) məqsəd funksiyasının maksimum (minimum) qiyməti (4.15) düz xəttindən ən uzaqda (ən yaxında) yerləşən kənar nöqtədə alınır:

$$Z_{\max}=Z(S)$$

$$(Z_{\min}=Z(A))$$

2 - ci üsul : (4.15) düz xətti özü-özünə paralel qalmaqla $\vec{N}$ vektoru istiqamətində (yaxud əks istiqamətdə) o vaxta qədər hərəkət etdirilir ki, o həllər çoxbucaqlısına dayaq olsun.

Tərif 4.2. Əgər verilmiş düz xətt və ondan bir tərəfdə yerləşən qabarıq çoxbucaqlı heç olmazsa bir ortaq nöqtəyə malik olarsa, ona dayaq düz xətt deyilir.

Müvafiq nöqtə isə dayaq nöqtəsi adlanır.

Şəkil 4.2 - dən göründüyü kimi (4.15) düz xətti həllər çoxbucaqlısına iki dəfə dayaq (A və S nöqtələrində) olur .

S dayaq nöqtəsi $\vec{N}$ vektoru istiqamətində A dayaq nöqtəsindən sonra yerləşdiyi üçün alırıq:

$$Z_{\max}=Z(S)$$

$$(Z_{\min}=Z(A)).$$

V. Məsələnin optimal həllinin təyini.

Ekstremum nöqtə həllər çoxbucaqlısının kənar nöqtələrindən biri ilə üst-üstə düşür. Şəkil 4.2 - dən göründüyü kimi həmin nöqtə müəyyən düz xəttlərin kəsişməsində yerləşir. Deməli, ekstremum nöqtənin koordinatlarını tapmaq üçün müvafiq düz xətt tənliklərini sistem şəklində həll etmək kifayətdir. Alınmış qiymətlər məcmusu məsələnin optimal həllini təyin edir.

VI. Məqsəd funksiyasının ekstremum qiymətinin hesablanması.

S(A) ekstremum nöqtəsinin koordinatlarını (4.11) ifadəsində yerinə yazır və məqsəd funksiyasının maksimum (minimum) qiymətini hesablayırıq:

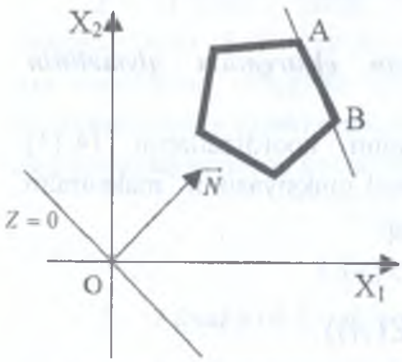
$$Z_{\max} = Z(S)$$

$$(Z_{\min} = Z(A)).$$

(4.11) – (4.13) ikiölçülü XP məsələsinin həndəsi izahına baxdıqdan sonra belə nəticəyə gəlmək olar ki, əgər (4.11) məqsəd funksiyası üçün maksimum qiymət axtarılırsa, onda məsələnin həlli prosesində şəkil 4.2 – 4.6 - də təsvir edilmiş müxtəlif hallara rast cəlmək mümkündür. Məsələn, yuxarıda göstərildiyi kimi, şəkil 4.2 – də məqsəd funksiyası öz maksimum qiymətini həllər çoxbucaqlısının yeganə S kənar nöqtəsində alır, daha doğrusu $Z_{\max} = Z(S)$ olur.

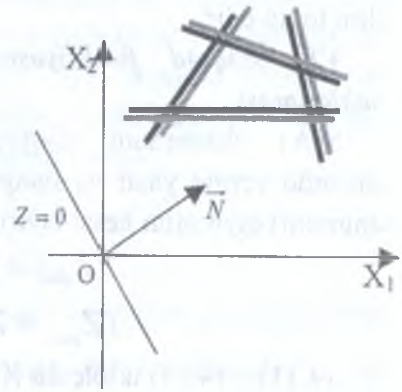
Şəkil 4.3 - dən isə görürük ki, $P_1x_1 + P_2x_2 = const$ səviyyə xətti
$\overline{N} = (P_1, P_2)$ normal vektoru istiqamətində hərəkət etdirildikdə AB tərəfi boyunca məsələnin həllər çoxbucaqlısına dayaq olur. Buna görə də $Z(X)$ məqsəd funksiyası AB parçasının hər bir nöqtəsində maksimum qiymət alır. Deməli XP

məsələsi sonsuz sayda optimal həllərə malikdir və onlardan hər birində məqsəd funksiyası eyni və yalnız eyni bir kustremum qiymət alır. Şəkil 4.4 – də isə (4.12) – (4.13) şərtləri uyuşmayan olduğu hal təsvir edilmişdir. Bu halda məsələnin mümkün həllər çoxluğu boşdur və deməli, onun heç bir həlli yoxdur.



$Z_{max} \to AB$ parçası

Şəkil 4.3



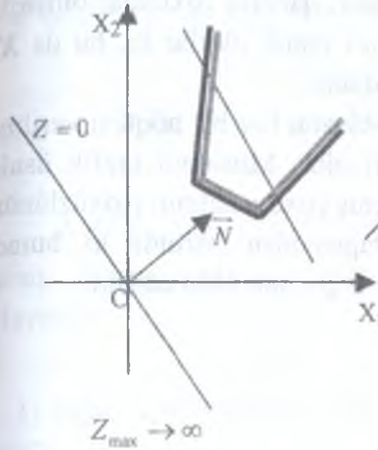
Mümkün həllər çoxluğu boşdur

Şəkil 4.4

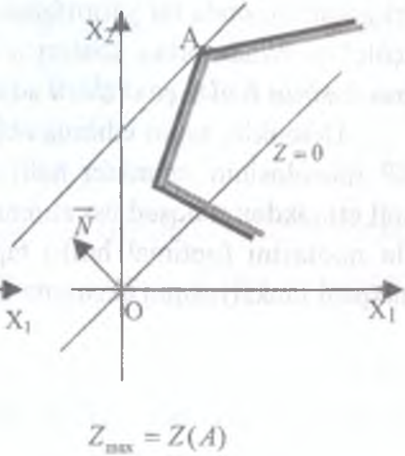
Əgər (4.11) – (4.13) XP məsələsinin həllər çoxluğu ***qeyri-məhdud oblastdan*** ibarət olarsa, onda aşağıdakı iki hal mümkündür :

I hal. $P_1x_1 + P_2x_2 = const$ səviyyə xəttini $\vec{N}$ vektoru istiqamətində hərəkət etdirdikdə o həmişə həllər çoxbucaqlısını kəsir, lakin heç bir nöqtədə ona dayaq olmur. Bu halda məqsəd funksiyası həllər çoxbucaqlısında yuxarıdan məhdud olmur, yəni $Z_{max} \to +\infty$ (şəkil 4.5).

II hal. $P_1x_1 + P_2x_2 = const$ səviyyə xətti $\vec{N}$ vektoru istiqamətində hərəkət etdirildikdə həllər çoxbucaqlısına dayaq olur (şəkil 4.6). Məqsəd funksiyası həllər çoxbucaqlısında yuxarıdan məhduddur, yəni o öz maksimum qiymətini alır.



Şəkil 4.5



Şəkil 4.6

Qeyd edək ki, məsələnin verilmiş şərtləri daxilində məqsəd funksiyasının minimum qiymətinin axtarılması eyni şərtlər daxilində onun üçün maksimum qiymətin axtarılmasından onunla fərqlənir ki, burada səviyyə xətti $\overrightarrow{N}$ vektoruna əks istiqamətdə hərəkət etdirilir. Aydındır ki, "max" XP məsələsinin qrafik üsulla həlli zamanı yuxarıda göstərilmiş oxşar hallar həmçinin müvafiq "min" XP məsələsinin həlli prosesində də təsadüf edə bilərlər.

Əgər verilmiş XP məsələsi üçölçülü ($n = 3$) olarsa, onda məhdudiyyət şərtlərinə daxil olan bərabərsizliklərə həndəsi olaraq üçölçülü fəzada

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i; \qquad (i = \overline{1,m})$$

sərhəd müstəviləri ilə məhdudlaşan yarımfəzalar, məchulların mənfi olmaması şərtlərinə isə

$$x_j = 0; \qquad (j = 1,2,3)$$

sərhəd müstəviləri ilə məhdudlaşan yarımfəzalar uyğun olacaqdır.

Əgər məsələnin məhdudiyyət şərtləri uyuşandırsa (birgədirsə), onda bu yarımfəzalar, qabarıq çoxluqlar olmaqla, üçölçülü fəzada ortaq kəsişməyə malik olurlar ki, bu da *XP* ***məsələsinin həllər çoxüzlüsü*** adlanır.

Beləliklə, təyin edilmiş oblastın hər bir nöqtəsi verilmiş XP məsələsinin mümkün həlli olur. Məsələni qrafik üsulla həll etməkdən məqsəd isə alınmış çoxbucaqlının (çoxüzlünün) elə nöqtəsini (optimal həlli) tapmaqdan ibarətdir ki, burada məqsəd funksiyasının ekstremum qiyməti əldə edilsin.

4.3. XP məsələsinin qrafik üsulla həllinə aid misal

Məsələ. Xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulla həll edin:

məqsəd funksiyası

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min); \tag{4.16}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \end{cases} \tag{4.17}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \tag{4.18}$$

Həlli

I. Məsələnin həllər çoxluğunun təyini

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 10 \quad (L_1), \\ -2x_1 + 3x_2 &= 6 \quad (L_2), \\ 2x_1 + 4x_2 &= 8 \quad (L_3) \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \quad (L_4) \\ x_2 &= 0 \quad (L_5) \end{aligned} \tag{4.20}$$

X_1OX_2 düzgubcaqlı koordinat sistemində L_1 düz xəttini quraq. Bunun üçün düz xəttin ixtiyari nöqtəsini tapmaq kifayətdir:

$$2x_1 + x_2 = 10 \quad (L_1); \tag{4.21}$$

1) Əgər $x_1 = 0$ olarsa, onda (4.21) – dən $x_2=10$ alırıq, A (0;10).

2) Əgər $x_2 = 0$ olarsa, onda (4.21) - dən $x_1 = 5$ alırıq, B (5;0).

Beləliklə, L_1 düz xətti A və B nöqtələrindən keçir və o həmçinin (4.21) tənliyinin həllər çoxluğundan ibarətdir.

Oxşar qayda ilə (4.19) və (4.20) sistemlərinə daxil olan, yerdə qalan tənliklərə uyğun düz xətlər də qurulur (bax şəkil 4.7).

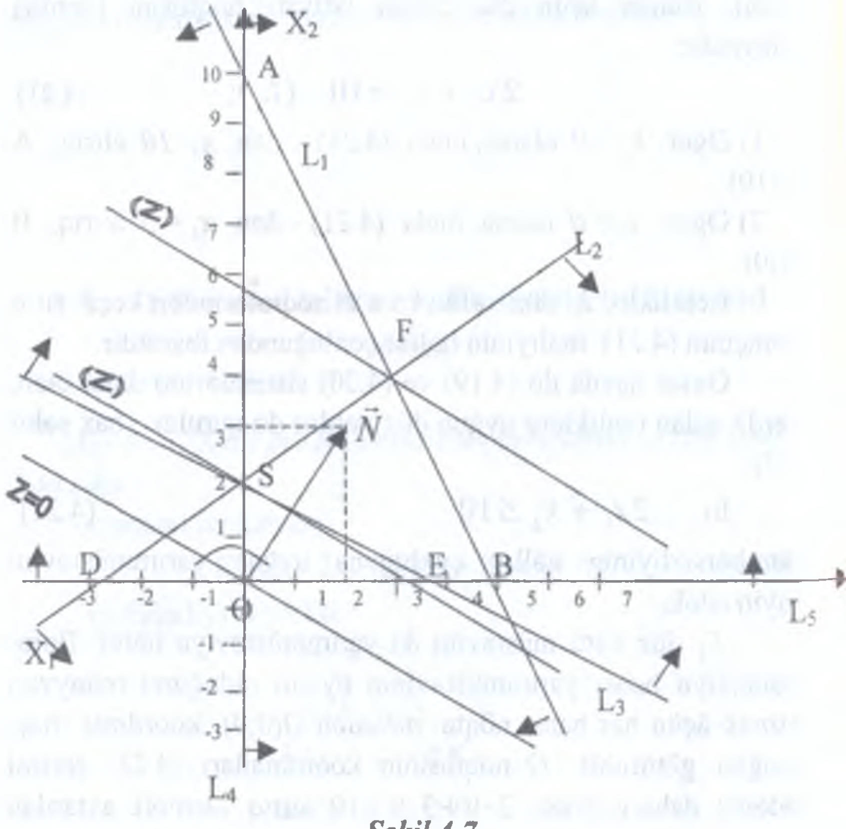
b) $$2x_1 + x_2 \le 10 \tag{4.22}$$

bərabərsizliyinin həllər çoxluğuna uyğun yarımmüstəvini təyin edək.

L_1 düz xətti müstəvini iki yarımmüstəviyə bölür. Bərabərsizliyə hansı yarımmüstəvinin uyğun olduğunu müəyyən etmək üçün hər hansı nöqtə, məsələn O(0;0) koordinat başlanğıcı götürülür. O nöqtəsinin koordinatları (4.22) şərtini ödəyir, daha doğrusu $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 10$ alırıq. Deməli, axtarılan yarımmüstəvi koordinat başlanğıcını özündə saxlayır. Həmin yarımmüstəvi L_1 düz xətti üzərində oxlarla göstərilmişdir.

(4.12) və (4.13) sistemlərinə daxil olan, yerdə qalan bərabərsizliklərə uyğun yarımmüstəvilər də oxşar qayda ilə təyin edilir.

v) Alınmış beş dənə yarımmüstəvinin ortaq kəsişməsi SFBE məhdud çoxbucaqlısından ibarət olur. SFBE çoxbucaqlısı (4.11) - (4.13) XP məsələsinin mümkün həllər çoxluğunu təşkil edir.



Şəkil 4.7

II. $\overrightarrow{N} = (p_1, p_2)$, *yəni* $\overrightarrow{N} = (2;3)$ **vektoru qurulur.**

III. $Z(x) = 0 \perp \overrightarrow{N}$, *yəni* $2x_1 + 3x_2 = 0 \perp \overrightarrow{N}$ *düz xətti qurulur.*

IV. Ekstremum nöqtənin tapılması.

1-ci üsulu tətbiq etməklə aşkar edirik ki, S və F dayaq nöqtələrdir. Deməli,

$$Z_{max} = Z(F)$$

$$Z_{min} = Z(S).$$

V. Məsələnin optimal həllinin təyini.

F nöqtəsi L_1 və L_2 düz xəttlərinin kəsişməsindən ibarətdir. Ona görə də

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 & (L_1), \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 & (L_2) \end{cases}$$

tənliklər sistemini həll edib F nöqtəsinin $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ koordinatlarını tapırıq. Daha doğrusu (1) - (3) XP məsələsinin optimal həlli $(x_1 = 3, x_2 = 4)$ olur.

Oxşar qayda ilə alırıq :

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \quad (L_2),$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8 \quad (L_3)$$

S (0 ; 2)

VI. Z(x) məqsəd funksiyasının ekstremum qiymətinin hesablanması.

$$Z_{max} = Z(F) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$$

$$Z_{max} = 18.$$

Eyni ilə hesablayırıq :

$$Z_{min} = Z(S) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6,$$

$$Z_{min} = 6.$$

Cavab: $F(x_1 = 3, x_2 = 4)$; $Z_{max} = Z(F) = 18$.

$S(x_1 = 0, x_2 = 2)$; $Z_{min} = Z(S) = 6$.

Mövzu 5. XP – də XƏTTİ CƏBRİN TƏTBİQİ

5.1. Xətti tənliklər sistemi və onun həllərinin xüsusiyyətləri

Tərif 5.1.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m \end{cases} \tag{5.1}$$

yaxud qısa şəklldə

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = a_i \; ; \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{5.2}$$

sisteminə n məchullu m tənlikdən ibarət xətti tənliklər sistemi (XTS) deyilir.

Burada a_i $(i = \overline{1,m})$ - verilmiş ədədlərdir və (5.1) sistemində sağ tərəflər yaxud sərbəst hədlər adlanır;

a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ - verilmiş ədədlərdir və (5.1) sisteminin əmsalları adlanır;

x_j $(j = \overline{1,n})$ - məchul kəmiyyətlərdir.

a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ əmsallarından ibarət

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n} \; ; \tag{5.3}$$

düzbucaqlı ədədi cədvəli (5.1) sisteminin *əsas matrisi* adlanır.

a_{ij} əmsalı (5.3) matrisinin ***i sətri*** və **j sütununda** yerləşir. O (5.1) sisteminin i tənliyində x_j məchulunun əmsalından ibarətdir.

(5.3) matrisinə (5.1) sisteminin a_i sərbəst hədlərindən ibarət sütunu da əlavə etsək, onda (5.1) sisteminin

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_m \end{array} \right); \qquad (5.4)$$

genişləndirilmiş matrisini alarıq.

Burada sərbəst hədlər sistemin əsas matrisindən düz xətt parçası ilə ayrılmışdır.

Tərif 5.2. (5.1) tənliklərindən hər birini doğru ədədi bərabərliyə çevirən $x_1, x_2, \dots, x_n$ məchullarının nizamlanmış qiymətləri məcmusuna XTS-nin həlli deyilir.

Tərif 5.3. (5.1) sisteminin bütün həlləri çoxluğuna onun ümumi həlli deyilir.

Sistemi həll etmək – onun ümumi həllini tapmaqdan ibarətdir.

Tərif 5.4. Əgər (5.1) tənliklər sisteminin heç olmazsa bir həlli vardırsa, ona uyuşan (birgə), heç bir həlli olmadıqda isə – uyuşmayan (birgə olmayan) sistem deyilir.

Tərif 5.5. Əgər eyni sayda məchullara malik iki xətti tənliklər sistemindən hər hansı birinin istənilən həlli eyni zamanda digər sistemin də həlli olarsa, daha doğrusu onların həllər çoxluqları üst-üstə düşərsə, həmin sistemlərə eynigüclü yaxud ekvivalent sistemlər deyilir.

***Tərif 5.6. XTS - də aparılan aşağıdakı çevirmələrə sadə çevirmələr deyilir*:

a) sistemin istənilən tənliyinin sol və sağ tərəflərinin $\lambda \neq 0$ ədədinə vurulması;

b) bir tənliyin sol və sağ tərəflərinə sistemin digər tənliyinin eyni ədədə vurulmuş müvafiq tərəflərinin əlavə edilməsi;

v) sistemdə ixtiyari tənliklərin yerlərinin dəyişdirilməsi.

Qeyd 5.1. v) növ çevirmə a) və b) növ çevirmələr zənciri ilə əvəz edilə bilər. b) çevirməsi isə $\lambda = 1$ olduqda a) və b) növ çevirmələr zənciri ilə əvəz edilə bilər.

Teorem 5.1. Sadə çevirmələr nəticəsində XTS eynigüclü sistemə çevrilir.

Qeyd edək ki, istənilən (5.1) XTS üçün yalnız üç hal mümkündür:

I hal. XTS yeganə həllə malikdir;
II hal. XTS sonsuz həllər çoxluğuna malikdir;
III hal. XTS heç bir həllə malik deyildir.

Tərif 7. Uyuşan XTS-nin ranqı onun əsas matrisinin ranqına deyilir.

Burada aşağıdakı nəticələr doğrudur:

Nəticə 1. Əgər sistemin ranqı məchulların sayına bərabərdirsə, onda XTS yeganə həllə malikdir.

Nəticə 2. Əgər sistemin ranqı məchulların sayından az olarsa, onda XTS sonsuz həllər çoxluğuna malikdir.

Nəticə 3. Əgər XTS-nin ranqı r, məchulların sayı isə n olarsa, onda r sayda məchullar $n - r = k$ sayda sərbəst məchullarla xətti ifadə olunurlar.

5.2. Adi Jordan əvəzetməsi (AJƏ)

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + a_i; \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (5.5)$$

xətti tənliklər sisteminə baxaq.

Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ***asılı olmayan,*** $y_1, y_2, \ldots, y_m$ - isə ***asılı dəyişənlər*** adlanır.

(5.5) sistemini cədvəl şəklində göstərək:

$$\begin{array}{r|cccccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & \ldots & \overset{\downarrow}{x_s} & \ldots & x_n & & 1 \\
\hline
y_1 = & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n} & & a_1 \\
y_2 = & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2n} & & a_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
\rightarrow y_r = & a_{r1} & a_{r2} & \ldots & \boxed{a_{rs}} & \ldots & a_{rn} & & a_r \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
y_m = & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{ms} & \ldots & a_{mn} & & a_m \\
\hline
\end{array} \qquad (5.6)$$

Asılı olmayan x_j $(j = \overline{1,n})$ dəyişənləri cədvəlin yuxarısında, y_i $(i = \overline{1,m})$ asılı dəyişənləri isə cədvəlin sol tərəfində yerləşirlər.

Tutaq ki, bizə x_s-in asılı, y_r –in isə asılı olmayan dəyişənə çevrilməsi lazımdır. Bu məqsədə yalnız $a_{rs} \neq 0$ şərti daxilində nail olmaq mümkündür. O ***əsas element*** adlanır. Bu zaman r - sətri ***əsas sətir,*** s – sütunu isə ***əsas sütun*** adlanır.

Daha sonra adi Jordan əvəzetməsinin (AJƏ) bir addımını etmək üçün aşağıdakı beş əməliyyat yerinə yetirilir:

1) $a_{rs} \neq 0$ ***əsas elementi vahid ilə əvəz edilir;***

2) r əsas sətrinin yerdə qalan elementləri yalnız öz işarələrini əksinə dəyişir;

3) s əsas sütununun yerdə qalan elementləri olduğu kimi saxlanılır;

4) əsas sətir və sütuna daxil olmayan yerdə qalan cədvəl elementləri aşağıdakı düsturla hesablanır:

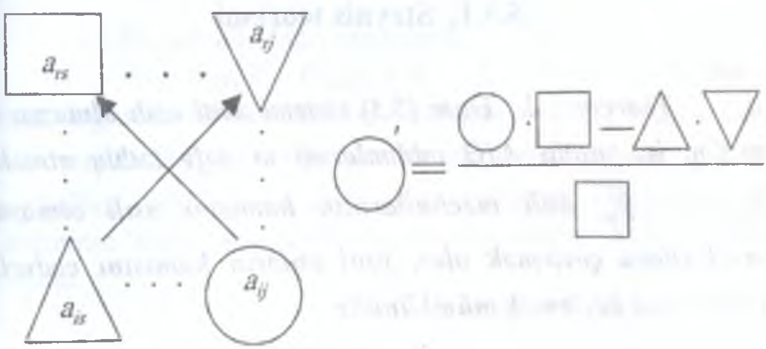
$$b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}; \quad (i \neq r, j \neq s) \qquad (5.7)$$

5) yeni alınmış cədvəlin elementlərinin hamısı $a_{rs} \neq 0$ əsas elementinə bölünür ki, bu da şərti olaraq cədvəlin a_{rs} elementinə bölünməsi şəklində göstərilir.

Nəticədə (5.6) cədvəlindən aşağıdakı şəkildə yeni cədvələ keçirik:

	x_1	x_2	...	y_r	...	x_n	1	
$y_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	a_{1s}	...	b_{1n}	b_1	
$y_2 =$	b_{21}	b_{22}	...	a_{2s}	...	b_{2n}	b_2	
...	...	...	...	...	...	...	...	(5.8)
$x_s =$	$-a_{r1}$	$-a_{r2}$	...	1	...	$-a_{rn}$	$-a_r$	$: a_{rs}$
...	...	...	...	...	...	...	...	
$y_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	a_{ms}	...	b_{mn}	b_m	

Qeyd 5.2. (8) düsturu üzrə b_{ij} elementləri müəyyən düzbucaqlının təpə nöqtələrində yerləşən cədvəl elementləri əsasında hesablandığı üçün ona ***«düzbucaqlı sxemi»*** deyilir. Sxem üzrə aparılan hesablamanın mahiyyətini isə aşağıdakı kimi təsvir etmək olar:



burada aşağıdakı şərti işarələr qəbul edilmişdir:

○ - dəyişən element;

□ - əsas element;

△ ▽ - düzbucaqlının digər diaqonalı üzrə verilmiş elementlər;

○′ - axtarılan element.

Qeyd 5.3. Cədvəldəki sərbəst hədlər də düzbucaqlı sxemi qaydası ilə hesablanır, daha doğrusu alırıq:

$$b_{ij}=a_{ij}\cdot a_{rs}-a_{is}\cdot a_{rj};\quad (i\neq r).$$

Qeyd 5.4. Adi Jordan əvəzetməsinin hər bir addımı nəticəsində verilmiş xətti tənliklər sistemindən onunla eynigüclü olan yeni tənliklər sisteminə keçilir. Belə ki, AJƏ-nin hər addımı sadə çevirmələr ardıcıllığından ibarətdir.

5.3. Jordan əvəzetməsinin xətti cəbrdə tətbiqi

5.3.1. Steynis teoremi

Teorem 5.2. ***Əgər (5.5) sistemi xətti asılı olmazsa və $m \le n$ isə, onda AJƏ addımlarını m dəfə tətbiq etməklə $y_1, y_2, \ldots, y_m$ asılı məchulların hamısını asılı olmayan məchullara çevirmək olar, yəni onların hamısını cədvəlin yuxarısına keçirmək mümkündür.***

İsbatı. Əksini fərz edək. Tutaq ki, AJƏ addımlarının tətbiqi nəticəsində $y_1, y_2, \ldots, y_m$ asılı məchullarının hamısı yox, yalnız müəyyən hissəsi, məsələn, $y_1, y_2, \ldots, y_k$ (burada $k < m$) məchulları cədvəlin yuxarısına keçirilmişdir. Bu o deməkdir ki, cədvəlin sol tərəfində qalmış $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$ asılı məchullarının yerləşdiyi sətir və cədvəlin yuxarısında qalmış x_j asılı olmayan məchullarının yerləşdiyi sütunların kəsişmələrində sıfırlar alınmışdır. Onlar isə əsas elementlər kimi seçilə bilməzlər. Dəqiq desək, aşağıdakı şəkildə cədvəl alınmışdır:

$$\begin{array}{cc|ccc|ccc|c|}
 & & y_1 & \ldots & y_k & x_{k+1} & \ldots & x_n & 1 \\
\hline
x_1 & = & b_{11} & \ldots & b_{1k} & b_{1,k+1} & \ldots & b_{1n} & b_1 \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_k & = & b_{k1} & \ldots & b_{kk} & b_{k,k+1} & \ldots & b_{kn} & b_k \\
\hline
y_{k+1} & = & b_{k+1,1} & \ldots & b_{k+1,k} & 0 & \ldots & 0 & b_{k+1} \\
y_{k+2} & = & b_{k+2,1} & \ldots & b_{k+2,k} & 0 & \ldots & 0 & b_{k+2} \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
y_m & = & b_{m1} & \ldots & b_{mk} & 0 & \ldots & 0 & b_m \\
\hline
\end{array} \qquad (5.9)$$

(5.9) cədvəlindən yaza bilərik:

$$y_i = b_{i1}y_1 + \ldots + b_{ik}y_k + b_i; \quad (i = k+1, k+2, \ldots, m);$$

daha doğrusu cədvəlin sol tərəfində qalmış $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$ asılı məchulları cədvəlin yuxarısına keçirilmiş $y_1, y_2, \ldots, y_k$ məchulları vasitəsi ilə xətti ifadə edilirlər. Bu isə (5.5) sisteminin xətti asılı olmaması şərtinə ziddir. Teorem isbat olundu.

5.3.2. Tərs matrisin tapılması

Tərif 5.8. A kvadrat matrisinin tərs matrisi elə A^{-1} matrisinə deyilir ki, onların hasili

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad \textit{olsun.}$$

Burada *E - vahid matrisdir*. Onun baş diaqonalı boyunca yerləşən bütün elementlər vahidə, yerdə qalan elementlər isə sıfıra bərabərdirlər. *E* matrisini istənilən *A* kvadrat matrisinə vurduqda nəticədə həmin *A* matrisinin özü alınır, yəni AE = EA=A.

Teorem 5.3. Əgər A matrisinin tərsi vardırsa, onda onun determinantı sıfırdan fərqlidir, yəni o cırlaşmayandır.

Tutaq ki,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n,n},$$

kvadrat, cırlaşmayan matrisi verilmişdir, yəni onun determinantı

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A matrisinin tərsini tapmaq tələb olunur.

Aşağıdakı xətti asılı olmayan müvafiq XTS-ni tərtib edək:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n;\ (i = \overline{1,n}),$$

və onu cədvəl şəklində göstərək:

$$
\begin{array}{r|cccc|}
 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\
\hline
y_1= & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
y_2= & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_n= & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\
\hline
\end{array}
\tag{5.10}
$$

Steynis teoreminə əsasən (5.10) cədvəli üzərində AJƏ-nin n sayda addımlarını ardıcıl olaraq tətbiq etməklə bütün $y_1, y_2, \ldots, y_n$ asılı məchullarını asılı olmayan məchullara çevirmək olar. Onda bəzi sətir və sütunların yerlərini dəyişdikdən sonra nəticədə aşağıdakı şəkildə cədvəl alınır:

$$
\begin{array}{r|cccc|}
 & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\
\hline
x_1 = & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\
x_2 = & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_n = & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \\
\hline
\end{array}
$$

Burada

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

verilmiş A matrisinin tərs matrisi olacaqdır.

5.3.3. Matrisin ranqının hesablanması

Tərif 5.9. ***A matrisinin ranqı onun xətti asılı olmayan sətir və ya sütunlarının maksimum sayına deyilir.***

Tutaq ki,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

düzbucaqlı matrisi verilmişdir və onun ranqının hesablanması tələb olunur.

Bu məqsədlə aşağıdakı şəkildə müvafiq cədvəlin tərtib edilməsi kifayətdir:

$$\begin{array}{r|cccc|} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline y_1 = & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ y_2 = & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m = & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

Daha sonra AJƏ addımları ardıcıl olaraq tətbiq edilməklə cədvəlin yuxarısına imkan daxilində maksimum sayda asılı məchullar keçirilir. Yəni bu o vaxta qədər davam etdirilir ki, artıq müvafiq prosesi tətbiq etmək mümkün olmur, daha doğrusu aşağıdakı cədvəl alınır:

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|} & y_1 & \dots & y_k & x_{k+1} & \dots & x_n \\ \hline x_1 = & b_{11} & \dots & b_{1k} & b_{1,\,k+1} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k = & b_{k1} & \dots & b_{kk} & b_{k,\,k+1} & \dots & b_{kn} \\ \hline y_{k+1} = & b_{k+1,\,1} & \dots & b_{k+1,\,k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m = & b_{m1} & \dots & b_{mk} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (5.11)$$

Aydındır ki, cədvəlin yuxarısına keçirilmiş y_i-lərin maksimum sayı A matrisinin ranqıdır və onun xətti asılı olmayan sətirlərinin maksimum sayına bərabərdir. Bununla bərabər (5.11) cədvəlində həmçinin yerdə qalmış $y_{k+1},\dots, y_m$ asılı məchullarının cədvəlin yuxarısına keçirilmiş $y_1,\dots, y_k$ məchulları ilə xətti asılılığını ifadə edən b_{ij} $(i=\overline{k+1,m};\ j=\overline{1,k})$ əmsalları da alınır:

$$y_{k+1} = b_{k+1,1}y_1 + \dots + b_{k+1,k}y_k,$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$y_m = b_{m1}y_1 + \dots + b_{mk}y_k.$$

5.3.4. Xüsusi xətti tənliklər sisteminin həlli

Tutaq ki, (5.1) sistemində $m=n$ və A əsas matrisinin ranqı n-ə bərabərdir. n məchullu n xətti tənliklərdən ibarət (5.1) sistemini həll etmək tələb olunur. AJƏ üsulundan istifadə etməklə verilmiş sistemi həll etmək üçün müxtəlif üsullar mövcuddur.

Birinci üsul. (5.1) sistemini aşağıdakı cədvəl şəklində yazaq:

$$\begin{array}{r|cccc|}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline
a_1 = & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_2 = & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_n = & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ \hline
\end{array}\ ;$$

Steynis teoreminə əsasən AJƏ-nin n addımını tətbiq etməklə a_1, a_2, …, a_n sərbəst hədlərinin hamısını cədvəlin yuxarısına, x_1, x_2, …, x_n məchullarını isə onun sol tərəfinə keçirmək olar. Sətir və sütunlar üzrə mümkün yerdəyişmələr apardıqdan sonra alırıq:

$$\begin{array}{r|cccc|}
 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
\hline
x_1 = & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\
x_2 = & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n = & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \\
\hline
\end{array} \qquad (5.12)$$

Burada $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ olur və (5.12) cədvəlindən (5.1) sisteminin yeganə həlli aşağıdakı münasibətlər ilə təyin edilir:

$$x_1 = b_{11}a_1 + \dots + b_{1n}a_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = b_{n1}a_1 + \dots + b_{nn}a_n$$

İkinci üsul: (5.1) sistemini

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - a_i = 0;\ (i = \overline{1,n});$$

şəklində göstərək və müvafiq cədvələ keçək:

$$\begin{array}{r|cccc|c|}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\
\hline
0 = & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -a_1 \\
0 = & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -a_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 = & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & -a_n \\
\hline
\end{array}$$

Sərbəst sütun hədləri istisna olmaqla, digər cədvəl elementləri əsas elementlər seçilir və AJƏ-nin n addımı ardıcıl tətbiq edilir. Bu zaman hər addımdan sonra cədvəlin yuxarısına keçirilmiş sıfır altındakı sütun, yəni əsas sütun silinir. Nəticədə

$$\begin{array}{r|c|}
 & 1 \\
\cline{2-2}
x_1 = & b_1 \\
x_2 = & b_2 \\
\dots & \dots \\
x_n = & b_n \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

alırıq və buradan isə XTS - nin həlli:

$$x_1 = b_1, x_2 = b_2 \dots, x_n = b_n$$

şəklində təyin edilir.

Jordan-Qauss üsulu. Bu üsul ikinci üsuldan onunla fərqlənir ki, AJƏ-nin hər addımından sonra nəinki cədvəlin yuxarısına keçirilmiş sıfır altındakı əsas sütun eyni zamanda əsas sətir də cədvəldən silinir. Bununla bərabər cədvəlin sol tərəfinnə keçirilmiş x_j məchulunun qiymətini hesablamaq üçün müvafiq ifadə cədvəldən kənarda yazılır. AJƏ-nin sonuncu addımını tətbiq etməklə məchullardan hər hansı birinin qiyməti tapılır. Digər məchulların qiymətləri isə artıq məchulların məlum qiymətlərini x_j üçün alinmış müvafiq ifadələrdə yerinə yazmaqla təyin edilir. Daha dəqiq desək, sistemə daxil olan məchulların qiymətlərinin tapılması prosesi sondan əvvələ olan istiqamətdə aparılır.

5.3.5. Ümumi xətti tənliklər sisteminin həlli

Fərz edək ki, XTS-nin əsas matrisinin r ranqı yaxud asılı olmayan tənliklərin sayı məchulların sayından azdır, yəni $r < n$. Müvafiq sistemlərin tədqiqi və həlli xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsində xüsusi maraq kəsb edir.

(5.1) sistemini

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - a_i = 0, \ (i = \overline{1,m}) \qquad (5.13)$$

şəklində yazaq.

Tutaq ki, (5.1) sistemində $m < n$ və onun $A = (a_{ij})_{m,n}$ əsas matrisinin ranqı $r \le m < n$. Ümumi XTS - ni həll edərkən əsas (bazis) və qeyri – əsas (sərbəst) məchulları fərqləndirmək lazımdır.

Tərif 5.10. Əgər n məchullu XTS-də istənllən m sayda (m < n) məchulların əmsallarından ibarət determinant sıfırdan fərqli olarsa, onlara əsas (yaxud bazis) məchulları deyilir. Onda yerdə qalan n - m sayda məchullara qeyri-əsas (yaxud sərbəst) məchullar deyilir.

n məchuldan düzəldilmiş müxtəlif qruplar əsas məchullar ola bilər. Deməli, əsas məchullardan ibarət qrupların maksimum mümkün sayı n məchuldan əsas məchulların seçilməsi üsullarının sayma, yəni

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - ə bərabər olmalıdır. Lakin bəzi hallarda m sayda məchulların əmsallarından ibarət matrisin determinantı sıfıra da bərabər ola bilər. Ona görə də əsas məchullardan ibarət qrupların ümumi sayı C_n^m - dən çox ola bilməz.

(5.1) ümumi XTS-ni həll edərkən aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5.4. Əgər (5.1) XTS-nin A matrisinin ranqı r və m < n olarsa, yəni heç olmazsa bir qrup əsas məchullar mövcuddursa, onda bu sistem qeyri-müəyyəndir, belə ki, qeyri-əsas məchulların hər bir istənilən qiymətləri məcmusuna XTS-nin də bir həlli uyğundur.

(5.13) sistemini cədvəl şəklində yazaq:

$$\begin{array}{r|cccc|c|}
 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 \\ \hline
y_1 = & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & -a_1 \\
y_2 = & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & -a_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_m = & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & -a_m \\ \hline
\end{array} \qquad (5.14)$$

Steynis teoreminə əsasən AJƏ - nin ardıcıl olaraq r addımını tətbiq etməklə (5.14) cədvəlindən alırıq:

$$
\begin{array}{cc|cccc|ccc|c}
 & & y_1 & y_2 & \dots & y_r & x_{r+1} & \dots & x_n & 1 \\
\hline
x_1 & = & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} & b_1 \\
x_2 & = & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_r & = & b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} & b_r \\
\hline
y_{r+1} & = & b_{r+1,1} & b_{r+1,2} & \dots & b_{r+1,r} & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y_m & = & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mr} & 0 & \dots & 0 & b_m \\
\hline
\end{array}
\tag{5.15}
$$

Əgər (14) sistemi uyuşandırsa, onda x_1, x_2, …, x_n məchullarının elə qiymətləri məcmusu vardır ki, bu qiymətlərdə bütün $y_1, y_2, \dots, y_m$-lər sıfıra bərabər olur. Bu yalnız

$$b_{r+1} = 0,\ b_{r+2} = 0,\ \dots,\ b_m = 0;$$

olan halda mümkündür.

$y_1 = 0$, $y_2 = 0$, …, $y_r = 0$ olduğundan, (5.15) cədvəlindən ilkin r sütunu silməklə alırıq:

$$
\begin{cases}
x_1 = b_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + b_{1n}x_n + b_1 \\
x_2 = b_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + b_{2n}x_n + b_2 \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
x_r = b_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + b_{rn}x_n + b_r
\end{cases}
\tag{5.16}
$$

x_{r+1}, …, x_n məchullarına istənilən qiymətləri verməklə (5.16) - dan yerdə qalan x_1, x_2, …, x_r məchullarımn uyğun qiymətləri təyin edilir.

x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n qeyri-əsas məchullarınm bütün mümkün olan qiymətləri sonsuz çox olduğundan (5.16) - dan alırıq ki, (5.1) sisteminin də sonsuz sayda həlləri olacaqdır. Bu zaman XTS-nin sonsuz sayda həlləri içərisində bazıs həllərinin tapılması mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Tərif 5.11. ***(5.1) XTS-nin həllində bütün n-m qeyri-əsas məchulları sıfıra bərabərdirsə, ona bazis həlli deyilir.***

Bazis həlləri həmçinin XP nəzəriyyəsində də xüsusi maraq kəsb edir və onlar çox vaxt ***dayaq həllər*** (yaxud ***dayaq planlar***) adlanır. Bazis həllərinin sayı sonludur, belə ki, o əsas məchulların qiymətləri məcmusunun C_n^m - dən çox olmayan sayına bərabərdir.

Tərif 5.12. Bazis həilində əsas dəyişənlərdən heç olmazsa biri sıfıra bərabər olarsa, ona cırlaşan həll, əks halda isə – cırlaşmayan həll deyllir.

(5.11) uyuşan XTS - nin sonsuz sayda həlləri vardır və burada bazis həllərinin sayı məhdud olub C_n^m ədədini aşmır.

Qeyd 5.5. (5.15) cədvəlində həmçinin

$$b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ir}; \quad (i = r+1, r+2, \dots, m),$$

elementləri alınır ki, bunlar da ilkin r sayda tənliklərin elə xətti kombinasiyasının əmsallarıdır ki, o i tənliyinə bərabərdir, yəni

$$y_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \dots + b_{ir} y_r; \quad (i = r+1, r+2, \dots, m)$$

ödənilir.

Qeyd 5.6. Əgər (5.1) sisteminin tənlikləri arasında xətti asılılığı ifadə edən əmsalları müəyyən etmək vacib deyildirsə, onda xüsusi XTS-nin həlli üçün ikinci üsulda olduğu kimi, AJƏ-nin hər addımından sonra əsas sütun silinir ki, bu da hesablamaları kifayət qədər azaltmağa imkan verir.

5.3.6. Xətti tənliklər sisteminin Jordan - Qauss üsulu ilə həllinə aid misal

Misal. ***Aşağıdakı xətti tənliklər sistemini Jordan-Qauss üsulu ilə həll edin:***

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 15, \\ 2x_1 + 18x_2 + 5x_4 = 83, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 18, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases} \qquad (5.17)$$

Həlli

(5.17) sistemini cədvəl şəklində göstərək

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
$0 =$	$\boxed{1}$	-1	-3	-5	-15
$0 =$	2	18	0	5	-83
$0 =$	1	5	2	6	-18
$0 =$	0	3	1	2	-8

,

$\boxed{1}$ – i əsas element seçib AJƏ - nin bir addımını tətbiq etsək

	0	x_2	x_3	x_4	1
$x_1 =$	1	1	3	5	15
$0 =$	2	20	6	15	-53
$0 =$	1	6	5	11	-3
$0 =$	0	3	1	2	-8

, (5.18)

cədvəlini alarıq. Sonra (5.18) cədvəlindən əsas sətir və sütun silinir:

	x_2	x_3	x_4	1
$0 =$	20	6	15	-53
$0 =$	6	5	11	-3
$0 =$	3	$\boxed{1}$	2	-8

5.4. Dəyişdirilmiş Jordan əvəzetməsi (DJƏ)

Jordan əvəzetməsi üsulunun bir sıra praktiki hesablama alqoritmlərində, o cümlədən xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli üçün verilmiş Simpleks üsulunda tələb olunur ki, əsas sətir elementləri öz işarələrini saxlasın, lakin əsas sütun elementləri isə öz işarələrini əksinə dəyişsin. Bu məqsədlə dəyişdirilmiş Jordan əvəzetməsi üsulundan istifadə edilir.

(5.13) sistemini aşağıdakı kimi yazaq:

$$y_i = -a_{i1}(-x_1) - a_{i2}(-x_2) - \ldots - a_{in}(-x_n) + a_i; \quad (i = \overline{1,m}). \qquad (5.25)$$

(5.25) sistemini cədvəl şəklində göstərək :

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_s$	...	$-x_n$	1
$y_1 =$	α_{11}	α_{12}	...	α_{1s}	...	α_{1n}	a_1
$y_2 =$	α_{21}	α_{22}	...	α_{2s}	...	α_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_r =$	α_{r1}	α_{r2}	...	$\boxed{\alpha_{rs}}$	...	α_{rn}	a_r
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	α_{m1}	α_{m2}	...	α_{ms}	...	α_{mn}	a_m

(5.26)

Burada

$$\alpha_{ij} = -a_{ij}; \quad (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}); \qquad (5.27)$$

şərti işarələri qəbul edilmişdir.

Tutaq ki, $\alpha_{rs} \neq 0$ və onu əsas element olaraq götürək. Onda DJƏ-nin bir addımı da beş əməliyyat əsasında yerinə yetirilir. Bu zaman 2) və 3) əməliyyatları AJƏ-dən fərqli olaraq yerlərini dəyişir, daha doğrusu alırıq:

2) s əsas sütununun yerdə qalan elementləri yalnız öz işarələrini əksinə dəyişir;

3) r əsas sətrinin yerdə qalan elementləri olduğu kimi saxlanılır.

Digər 1), 4) və 5) əməliyyatları isə həm DJƏ, həm də AJƏ üsullarında eynidirlər.

DJƏ addımı nəticəsində x_s asılı , y_r isə asılı olmayan dəyişənə çevrilir və cədvəldə bir-biri ilə əvəz edilirlər.

Beləliklə, (5.27) cədvəlindən aşağıdakı yeni cədvələ keçirik:

$$
\begin{array}{rc|ccccccc|c|l}
 & & -x_1 & -x_2 & \dots & -y_r & \dots & -x_n & & 1 & \\
\hline
y_1 & = & \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & -\alpha_{1s} & \dots & \beta_{1n} & & \beta_1 & \\
y_2 & = & \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & -\alpha_{2s} & \dots & \beta_{2n} & & \beta_2 & \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \\
\rightarrow x_s & = & \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & 1 & \dots & \alpha_{rn} & & a_r & :\alpha_{rs}, \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \\
y_m & = & \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & -\alpha_{ms} & \dots & \beta_{mn} & & \beta_m & \\
\hline
\end{array}
$$

burada $\beta_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \alpha_{rs} - \alpha_{is} \cdot \alpha_{rj}; \quad (i \neq r, j \neq s);$

$$\beta_i = \alpha_i \cdot \alpha_{rs} - \alpha_{is} \cdot \alpha_r; \quad (i \neq r).$$

Mövzu 6. XP MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ ÜÇÜN SİMPLEKS ÜSULU

Simpleks[1] ***üsulu*** universal alqoritm olmaqla istənilən XP məsələsini həll etmək üçün istifadə olunur. O amerika riyaziyyatçısı Corc Dansiq tərəfindən tədqiq edilmiş və ilk dəfə olaraq 1949-cu ildə mətbuatda çap edilmişdir. Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, əvvəla XP məsələsinin hər hansı dayaq həlli tapılır. Daha sonra digər dayaq həllərə keçməklə məqsəd funksiyasının qiymətləri ardıcıl olaraq artaraq (azalaraq) onun maksimum (minimum) qiyməti tapılır. Məhz buna görə də Simpleks üsulu müxtəlif ədəbiyyatlarda çox vaxt «***planların ardıcıl yaxşılaşdırılması üsulu***» da adlandırılır. Yuxarıda göstərdiyimiz kimi Simpleks üsulu dəyişdirilmiş Jordan əvəzetməsi üsuluna əsaslanır.

6.1. «max» XP məsələsinin Simpleks üsulu ilə həlli

Tutaq ki, «max» XP məsələsi aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \to \max; \tag{6.1}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le a_m \end{cases} \tag{6.2}$$

---

[1] Simpleks (simplex – latın sözü olub, sadə deməkdir) - n – ölçülü fəzada n + 1 sayda təpə nöqtələrə malik olan sadə qabarıq çoxüzlüdür (məsələn, 3 – ölçülü fəzada tetraedr) ; simpleks həmçinin $\sum_{u=1}^{n} x_u \le 1$ şəklində bərabərsizliyin mümkün həllər oblastından (çoxluğundan) ibarətdir.

$$x_j \geq 0; \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (6.3)$$

burada p_j, a_i, a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ - verilmiş sabit ədədlərdir və $m > n$.

Simpleks üsulunun tətbiqinə keçməmişdən əvvəl (6.1) - (6.3) XP məsələsini kanonik (yaxud əsas) məsələ şəklində yazaq. Bu məqsədlə (6.2) şərtlərini

$$y_i = -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n + a_i \geq 0; \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (6.4)$$

kimi ifadə edək. Beləliklə, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ asılı dəyişənləri məsələyə daxil edilir.

Simpleks üsulu ilə XP məsələsinin həlli prosesi iki əsas mərhələdən ibarətdir:

I mərhələ. Dayaq həllin axtarılması.

II mərhələ. Optimal həllin axtarılması.

6.1.1. Dayaq həllin axtarılması

Dayaq həllin axtarılması mərhələsinin özü aşağıdakı altmərhələlərdən ibarətdir:

1) Cədvələ keçid.

Burada (6.1) - (6.3) XP məsələsi, həmçinin (6.4) nəzərə alınmaqla, cədvəl şəklində yazılır:

	$-x_1$		$-x_s$		$-x_n$	1	
$y_1 =$	a_{11}	$\ldots$	a_{1s}		a_{1n}	a_1	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$y_r =$	a_{r1}	$\ldots$	$\boxed{a_{rs}}$	$\ldots$	a_{rn}	a_r	(6.5)
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$y_m =$	a_{m1}	$\ldots$	a_{ms}	$\ldots$	a_{mn}	a_m	
$Z =$	$-p_1$	$\ldots$	$-p_s$	$\ldots$	$-p_n$	0	

2) Dayaq həllin tapılması əlaməti.

Tutaq ki, (6.5) - də sərbəst hədlərdən heç biri mənfi deyil, yəni

$a_1 \geq 0, \ldots, a_m \geq 0$. Онда $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ (6.6)

məsələnin dayaq həllidir. Doğrudan da (6.6) qiymətlərində (6.5) cədvəlindən alırıq ki, $y_1 = a_1 \geq 0, \ldots, y_m = a_m \geq 0$ olur. Daha doğrusu (6.4) şərtləri ödənir.

Beləliklə, ***«max» XP məsələsinin dayaq həllinin tapılması əlaməti Simpleks cədvəlinin sərbəst sütununda mənfi həddin olmamasından ibarətdir.***

3) Dayaq həllin axtarılması zamanı əsas elementin seçilməsi.

Tutaq ki, (6.5) cədvəlində heç olmazsa bir mənfi sərbəst hədd, məsələn, $a_r < 0$ vardır. Onda (6.6) qiymətləri məsələnin heç bir həllini vermir. Belə ki, bu qiymətlərdə $y_r = a_r < 0$ alırıq və o, (6.4) şərtləri ilə ziddiyyət təşkil edir.

Sərbəst sütunda mənfiliyi aradan qaldırmaq məqsədi ilə aşağıdakı qaydalar üzrə əsas element tapılır:

a) ən kiçik mənfi sərbəst həddin (tutaq ki, $a_r < 0$) yerləşdiyi r - sətir elementlərinə baxılır. Əgər burada heç bir mənfi element olmazsa, onda məsələnin şərtləri uyuşan (birgə) deyil. Deməli, məsələnin həlli yoxdur.

b) həmin sətirdə yerləşən hər hansı mənfi elementin ($a_{rs} < 0$) daxil olduğu s –sütunu əsas sütun olur.

v) sərbəst hədlərin əsas sütunun müvafiq elementlərinə olan mənfi olmayan nisbətləri tərtib edilir. Ən kiçik nisbətin alındığı sətir əsas sətir götürülür.

Tutaq ki, $\min\limits_i \left\{ \frac{a_i}{a_{is}} \geq 0 \right\} = \frac{a_r}{a_{rs}}$, onda r - sətri əsas sətir olur.

q) əsas s - sütunu və r – sətrinin kəsişməsində a_{rs} əsas elementi seçilir. Ona nəzərən DJƏ-nin bir addımı tətbiq edilir. Nəticədə b_r sərbəst həddi artıq müsbət olur, daha doğrusu,

$b_r = \frac{a_r}{a_{rs}} > 0$ alırıq.

Cədvəlin sərbəst sütununda qalan digər mənfi həddlər də oxşar qayda ilə mənfilikdən azad edilir. DJƏ-nin sonlu sayda addımlarını tətbiq etməklə nəticədə ya məsələnin şərtlərinin birgə olmadığını müəyyən edirik, ya da onun dayaq həllini tapırıq.

Qeyd 6.1. Xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin iqtisadi tətbiqi məsələlərində sərbəst həddlər müsbət, yə'ni $a_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$ olurlar. Ona görə də birinci mərhələnin 2) altmərhələsindən sonra bilavasitə II mərhələyə – optimal həllin axtarılmasına keçmək lazımdır.

Tutaq ki, I mərhələ başa çatmışdır, dayaq həll tapılmış və nəticədə aşağıdakı cədvəl alınmışdır:

	$-y_1$	...	$-y_k$	$-x_{k+1}$	...	$-x_s$	...	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	...	b_{1k}	$b_{1,k+1}$	...	b_{1s}	...	b_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_k =$	b_{k1}		b_{kk}	$b_{k,k+1}$	...	b_{ks}	...	b_{kn}	b_k
$y_{k+1} =$	$b_{k+1,1}$	...	$b_{k+1,k}$	$b_{k+1,k+1}$	...	$b_{k+1,s}$	...	$b_{k+1,n}$	b_{k+1}
$y_r =$	b_{r1}	...	b_{rk}	$b_{r,k+1}$	...	$\boxed{b_{rs}}$	...	b_{rn}	b_r
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	b_{m1}	...	b_{mk}	$b_{m,k+1}$	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
$Z =$	q_1	...	q_k	q_{k+1}	...	q_s	...	q_n	Q

(6.7)

Burada $b_1 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0$ (6.8)

və deməli, $y_1 = 0, \ldots, y_k = 0, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ (6.9) məsələnin dayaq həllidir. Məqsəd funksiyasının müvafiq qiyməti isə $Z = Q$. Bundan sonra II mərhələyə keçirik.

6.1.2. Optimal həllin axtarılması

Optimal həllin axtarılması mərhələsi aşağıdakı altmərhələlərdən ibarətdir:

1) Optimal həllin tapılması əlaməti.

(6.7) cədvəlinin Z – sətir əmsallarına baxılır. Əgər onların içərisində mənfi olanı yoxdursa, yəni

$$q_1 \geq 0, \ldots, q_n \geq 0,$$

olarsa, onda tapılmış (6.9) dayaq həlli məsələnin həm də optimal həllidir. Beləliklə, XP məsələsi həll edilmişdir və $Z_{max} = Q$.

Doğrudan da, (6.9) qiymətlərində (6.7) cədvəlindən alırıq:

$$x_1 = b_1 \geq 0, \ldots, x_k = b_k \geq 0, y_{k+1} = b_{k+1} \geq 0, \ldots, y_m = b_m \geq 0,$$

yəni (6.3) və (6.4) şərtləri ödənir.

(6.9) - dan fərqli qiymətlərdə isə

$$Z = -q_1 y_1 - \ldots q_k y_k - q_{k+1} x_{k+1} - \ldots - q_n x_n + Q \leq Q,$$

ödənir. Deməli, Q məqsəd funksiyasının ən böyük qiymətidir.

Beləliklə, ***«max» XP məsələsinin optimal həllinin tapılması əlaməti Simpleks cədvəlinin sərbəst sütununda mənfi həddin və Z sətrində isə mənfi əmsalın olmamasından ibarətdir.***

2) Optimal həllin axtarılması zamanı əsas elementin seçilməsi.

Tutaq ki, Z sətrində $q_s < 0$ mənfi əmsalı vardır. Onda

$$y_1 = 0, \ldots, y_k = 0, x_{k+1} = 0, \ldots, x_s > 0, \ldots x_n = 0$$

mümkün həllində $Z = -q_s x_s + Q > Q$ alarıq. Deməli, Q ədədi Z funksiyasının maksimum qiyməti olmur.

Z sətrindəki əmsalı mənfilikdən azad etmək məqsədi ilə aşağıdakı qaydalar əsasında əsas element seçilir:

a) Z sətrində ən kiçik $q_s < 0$ mənfi əmsalın daxil olduğu s sütunu əsas sütun olur;

b) bu sütunda müsbət elementlər götürülür və sərbəst həddlərin onlara olan nisbətləri müqayisə edilir. Ən kiçik nisbətin alındığı sətir əsas sətir olur.

Tutaq ki, $\min_i \left\{ \frac{b_i}{b_{is}} \geq 0 \right\} = \frac{b_r}{b_{rs}}$, onda r əsas sətirdir.

Qeyd 6.2. Əgər $q_s < 0$ mənfi əmsalı daxil olan əsas sütunda heç bir müsbət element olmazsa, onda Z məqsəd funksiyası yuxarıdan məhdud deyildir.

v) əsas s - sütunu və r - sətrinin kəsişməsində b_{rs} əsas elementi seçilir. Bu elementə nəzərən DJƏ-nin bir addımı tətbiq edilir. Nəticədə yeni q'_s əmsalı müsbət olur, çünki

$$q'_s = \frac{-q_s}{b_{rs}} > 0 \cdot$$

Cədvəlin sətrində qalan digər mənfi əmsallar da oxşar qayda ilə mənfilikdən azad edilir. DJƏ-nin sonlu sayda addımlarını tətbiq etməklə nəticədə ya Z məqsəd funksiyasının qeyri-məhdud olduğu müəyyən edilir, ya da XP məsələsinin optimal həlli tapılır.

6.2. «min» XP məsələsinin həlli üsulları

Xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin bir sıra iqtisadi tətbiqi məsələlərində (6.1) məqsəd funksiyası üçün (6.2) və (6.3) şərtləri daxilində minimum (ən kiçik) qiymətin tapılması tələb olunur.

«min» XP məsələsi iki üsulla həll edilir:

I üsul: Müvafiq "max" XP məsələsinə gətirilir.

Bunun üçün $Z(x)$ funksiyasını (-1) - ə vurmaq və aşağıdakı «max» XP məsələsini həll etmək kifayətdir:

məqsəd funksiyası

$$F(x)=(-1)Z(x)=-p_1x_1-p_2x_2-...-p_nx_n \to \max; \quad (6.10)$$

(6.2) və (6.3) şərtləri isə olduğu kimi saxlanılır.

Bu zaman alınmış «max» XP məsələsinin optimal həlli həm də ilkin «min» XP məsələsinin optimal həlli olur və aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$Z_{\min}=(-1)F_{(\max)}.$$

II üsul: «min» XP məsələsi bilavasitə Simpleks üsulu ilə həll edilir.

«min» XP məsələsinin həlli prosesi də iki əsas mərhələdən ibarət olur:

I mərhələ. Dayaq həllin axtarılması.
II mərhələ. Optimal həllin axtarılması.

Dayaq həllin axtarılması mərhələləri və tapılması əlamətləri «max» və «min» XP məsələlərində eyni olaraq qalır.

«min» XP məsələsinin optimal həllinin tapılması əlaməti isə, «max» XP məsələsindən fərqli olaraq, Simpleks cədvəlinin Z - sətrində müsbət əmsalın olmamasından ibarət olur.

Ona görə də, «min» XP məsələsinin optimal həllinin axtarılması zamanı əsas sütun olaraq Z sətrində ən böyük müsbət əmsalın yerləşdiyi sütun götürülür. Daha sonra əsas sətir və elementin seçilməsi qaydaları «max» XP məsələsində olduğu kimi yerinə yetirilir.

6.3. «max» XP məsələsinin Simpleks üsulu ilə həllinə aid misal

Məsələ. **İlkin məlumatlar aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:**

Ehtiyatların növləri	Məhsul vahidinə ehtiyatların sərfi normaları		Ehtiyatlar
	A	B	
Əmək, (adam-saat)	16	4	784
Xammal, (ton)	8	7	552
Avadanlıq, (saat)	5	9	567
Məhsul vahidindən mənfəət, (mln.man.)	4	6	-

1. A və B məhsullarının buraxılışı üzrə elə istehsal planları tərtib edin ki, məhsul satışından əldə edilən ümumi mənfəət maksimum olsun.

2. Optimal plan üzrə ehtiyatlardan istifadə olunmasını təhlil edin.

Həlli

A məhsulunun buraxılış planını x_1, *B* məhsulunun buraxılış planını x_2 ilə işarə edək. Onda cədvəldə verilmiş ilkin mə'lumatları nəzərə almaqla məsələnin iqtisadi-riyazi modeli aşağıdakı şəkildə formalaşır:

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = 4x_1 + 6x_2 \to \max; \qquad (6.11)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 16x_1 + 4x_2 \le 784, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 552, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 567 \end{cases} \qquad (6.12)$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \qquad (6.13)$$

Burada (6.11) məqsəd funksiyası buraxılmış məhsulun hamısının satışından əldə edilən ümumi mənfəəti ifadə edir. Ona görə də həmin funksiya üçün maksimum qiymət axtarılır.

(6.12) şərtləri ehtiyatların miqdarları üzrə tərtib edilir. Şərtlərdən hər biri göstərir ki, hər iki növ məhsulun buraxılışı ilə əlaqədar ehtiyatların məcmu məsarifi müvafiq ehtiyatların verilmiş miqdarını aşa bilməz. Əgər şərtdə = (<) ödəmirsə, deməli istehsal prosesində müvafiq ehtiyatlardan tam (qalıqla) istifadə olunur.

(6.13) şərtləri isə məhsul buraxılışı planları üzrə verilir və ona görə də mənfi kəmiyyətlər ola bilməzlər.

(6.11) – (6.13) məsələsini həll etməkdən məqsəd x_1 və x_2 məchulları üçün elə qiymətlər tapmaqdan ibarətdir ki, onlar (6.12) - (6.13) şərtlərini ödəsin və (6.11) məqsəd funksiyasına maksimum qiymət versinlər.

(6.11) məqsəd funksiyası, həmçinin (6.12) və (6.13) məhdudiyyət şərtləri hər iki x_1 və x_2məchullarına nəzərən xətti ifadələr olduqları üçün (6.11) - (13) XP məsələsidir və simpleks üsulu ilə həll edilir.

(6.12) şərtlərini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\begin{cases} y_1 = -16x_1 - 4x_2 + 784 \geq 0, \\ y_2 = -8x_1 - 7x_2 + 552 \geq 0, \\ y_3 = -5x_1 - 9x_2 + 567 \geq 0 \end{cases} \qquad (6.14)$$

Beləliklə, y_1, y_2, y_3 asılı dəyişənləri məsələyə daxil edilir.

I mərhələ. Dayaq həllin axtarılması.

1) Cədvələ keçid

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	16	4	784
$y_2 =$	8	7	552
$y_3 =$	5	$\boxed{9}$	567
$Z =$	-4	-6	0

(6.15)

2) Dayaq həllin tapılması əlaməti.

Cədvəlin sərbəst sütununda mənfi həddlər olmadığı üçün məsələnin birinci (ilkin) dayaq həlli tapılmışdır və o,

$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0); \qquad \text{(I)}$$

şəklindədir. Onda (6.15) - dən $Z_{(I)} = 0$ alırıq.

Qeyd 6.3. Hər bir həlldə $Z(x)$ məqsəd funksiyasının müvafiq qiyməti Simpleks cədvəlinin sərbəst sütunu və Z - sətrinin kəsişməsində alınır.

Bunun doğruluğunu yoxlamaq üçün isə tapılmış həlli (x_1 və x_2 - nin qiymətlərini) (6.11)-də nəzərə alıb $Z(x)$ - i hesablamaq kifayətdir.

II mərhələ. Optimal həllin axtarılması.

1) Optimal həllin tapılması əlaməti.

Z sətrində - 4, - 6 mənfi əmsalları olduğu üçün (I) dayaq həlli optimal deyil və onu yaxşılaşdırmaq üçün digər dayaq həllə keçmək lazımdır.

2) Optimal həllin axtarılması zamanı əsas elementin seçilməsi.

a) $-6 < -4$ olduğu üçün $s = 2$ əsas sütun olur.

$b)\ \min\left\{\dfrac{784}{4}, \dfrac{552}{7}, \dfrac{567}{9}\right\} = \dfrac{567}{9}$,

deməli $r = 3$ əsas sətir olur.

v) əsas $s = 2$ sütunu və $r = 3$ sətrinin kəsişməsində əsas element $\boxed{9}$ tapılır və DJƏ - nin bir addımı yerinə yetirilir:

$$\begin{array}{r|cc|c|l} & -x_1 & -y_3 & 1 & \\ \hline y_1 = & 124 & -4 & 4788 & \\ y_2 = & 37 & -7 & 999 & \\ x_2 = & 5 & \boxed{1} & 567 & ;\ 9; \\ \hline Z = & -6 & 6 & 3402 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cc|c} & -x_1 & -y_3 & 1 \\ \hline y_1 = & \dfrac{124}{9} & -\dfrac{4}{9} & 532 \\ \to y_2 = & \boxed{\dfrac{37}{9}} & -\dfrac{7}{9} & 111 \\ x_2 = & \dfrac{5}{9} & \dfrac{1}{9} & 63 \\ \hline Z = & -\dfrac{6}{9} & \dfrac{6}{9} & 378 \end{array} \qquad (6.16)$$

İkinci dayaq həll

$(x_1 = 0, y_3 = 0)$ və yaxud $(x_1 = 0, x_2 = 63)$; (II)

şəklində tapılır, (6.16) - dan isə $Z_{(II)} = 378$ alırıq.

$(x_1 = 0,\ x_2 = 63)$ dayaq həlli əvvəlki $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ dayaq həlli ilə müqayisədə yaxşı hesab edilir, belə ki,

$Z_{(II)} = 378 > 0 = Z_{(I)}$ ödənir. Daha doğrusu, Z məqsəd funksiyasının maksimum qiymətinə yaxınlaşmış oluruq.

Bununla bərabər (II) dayaq həll də optimal deyil, çünki Z - sətrində $-\dfrac{6}{9} < 0$ mənfi əmsalı vardır.

$$\min\left\{\frac{532\cdot 9}{124}, \frac{111\cdot 9}{37}, \frac{63\cdot 9}{5}\right\} = \frac{9\cdot 111}{37},$$

olduğu üçün $\boxed{\dfrac{37}{9}}$ əsas element seçilir. DJƏ-nin növbəti addımı tətbiq edilir:

$$\begin{array}{r|cc|c|l} & -y_2 & -y_3 & 1 & \\ \hline y_1 = & -\dfrac{124}{9} & \dfrac{80}{9} & \dfrac{5920}{9} & \\ x_1 = & 1 & -\dfrac{7}{9} & 111 & ;\dfrac{37}{9}; \\ x_2 = & -\dfrac{5}{9} & \dfrac{8}{9} & \dfrac{1776}{9} & \\ \hline Z = & \dfrac{6}{9} & \dfrac{20}{9} & \dfrac{14652}{9} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cc|c} & -y_2 & -y_3 & 1 \\ \hline y_1 = & -\dfrac{124}{37} & \dfrac{80}{37} & 160 \\ x_1 = & \dfrac{9}{37} & -\dfrac{7}{37} & 27 \\ x_2 = & -\dfrac{5}{37} & \dfrac{8}{37} & 48 \\ \hline Z = & \dfrac{6}{37} & \dfrac{20}{37} & 396 \end{array} \quad ; \quad (6.17)$$

Beləliklə, yeni dayaq həll alınır:

($y_2=0,\ y_3=0$) və yaxud ($x_1=27,\ x_2=48$) ; (III),

(6.17) - dən isə $Z_{(III)}=396$ müəyyən edirik.

Bununla bərabər $Z_{(III)} > Z_{(II)} > Z_{(I)}$ ödənir.

(6.17) cədvəlinin Z-sətrində mənfi əmsal qalmadığı üçün tapılmış (III) dayaq həlli baxılan məsələnin həm də optimal həllidir.

Deməli, $Z_{max}=Z_{(III)}=396.$

2. Optimal həll üzrə ehtiyatların istifadə olunmasının təhlili.

Bu məqsədlə ($x_1 = 27,\ x_2 = 48$) qiymətləri (6.12) şərtlərində yerinə yazılır. Onda alırıq:

əmək $\longrightarrow$ $16\cdot27+4\cdot48=432+192=624<784,$

xammal $\longrightarrow$ $8\cdot27+7\cdot48=216+336=552=552,$

avadanlıq $\longrightarrow$ $5\cdot27+9\cdot48=135+432=567=567.$

Beləliklə, əmək ehtiyatlarından 784-624=160 adam-saat istifadə edilməmiş qalır. Xammal ehtiyatları və avadanlığın iş vaxtı fondu isə tam istifadə olunur.

Cavab: ***x_1= 27 (ton) - A məhsulunun buraxılış planı,***
x_2= 48 (ton) - B məhsulunun buraxılış planı.
Z_{max}=396 (mln.man.) – buraxılan məhsulun satışından əldə edilən maksimum mənfəət.

Mövzu 7. XP - də QOŞMALIQ NƏZƏRİYYƏSİ

Xətti proqramlaşdırmanın hər hansı verilmiş məsələsini ilkin yaxud düz məsələ adlandıraq. Onda həmin məsələyə müəyyən qayda ilə digər məsələ qarşı qoyulur ki, ona da düz (yaxud ilkin) məsələyə nisbətən qoşma (yaxud birgə) məsələ deyilir. Hər iki məsələ xətti proqramlaşdırmanın qarşılıqlı qoşma olan məsələlər cütünü təşkil edirlər. Belə ki, burada məsələlərdən hər hansı biri digərinin qoşması olur.

Qoşmalıq nəzəriyyəsi xətti proqramlaşdırma məsələlərinin, onların həlli üsulları və prinsiplərinin keyfiyyətli tədqiqini aparmağa imkan verir, alınmış həll nəticələrinin hərtərəfli təhlili və elmi-əsaslandırılmış qərarların qəbul edilməsi üçün şərait yaradır. Düz və qoşma xətti proqramlaşdırma məsələləri arasındakı başlıca əlaqə isə xüsusilə ondan ibarətdir ki, məsələlərdən birinin həllini bilavasitə digərinin həlli vasitəsi ilə almaq olur.

Xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin daha ətraflı işlənilmiş riyazi əsasları ən səmərəli hesablama üsulları vasitəsilə qoşma məsələlərdən hər biri üçün optimal planın tapılmasını təmin edir, eyni zamanda qoşma məsələlərin xassələrinə əsaslanan bir sıra məzmunlu nəticələrə gəlməyə imkan verir ki, onlar da həm riyazi, həm də iqtisadi nöqteyi nəzərdən xüsusi maraq kəsb edirlər.

7.1. XP – nin qoşma məsələlərinin tərtibi

7.1.1. Simmetrik qoşma məsələlərin tərtibi üçün ümumi qaydalar

Xətti proqramlaşdırmanın (XP) qoşma məsələləri ***simmetrik*** və ***qeyri-simmetrik*** ola bilərlər. Simmetrik məsələlərdə həm düz, həm də qoşma məsələnin məhdudiyyət şərtləri bərabərsizliklərdən ibarət olur, məchulların işarələri üzərinə isə mənfi olmamaq şərtləri qoyulur. ***Qeyri-simmetrik***

məsələlərdə isə düz məsələnin məhdudiyyət şərtləri bərabərsizlik və bərabərliklərdən (tənliklərdən) ibarət olmaqla qarışıq şəkildə verilir. Bu zaman qoşma məsələnin məchulları mənfi də ola bilərlər. İndi isə ***simmetrik qoşma məsələlərin tərtibi üçün ümumi qaydaları*** ifadə edək.

Düz məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots + P_nX_n \to \max; \tag{7.1}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq a_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq a_m. \end{cases} \tag{7.2}$$

Məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{7.3}$$

$x_1, x_2, \ldots x_n$ məchulları üçün elə qiymətlər tapmalı ki, onlar (7.2) və (7.3) şərtlərini ödəsin, (7.1) xətti funksiyasına isə maksimum qiymət versinlər.

Tərif 7.1. Məhdudiyyət şərtlərində məchulların əmsallarından ibarət matris, sərbəst hədlərdən ibarət sütun-matrisi və məqsəd funksiyasının əmsallarından ibarət sətir-matrisi daxil olan matrisə XP məsələsinin genişləndirilmiş matrisi deyilir.

Tərif 7.1 - ə əsasən (7.1)–(7.3) XP məsələsinin genişləndirilmiş matrisi aşağıdakı şəkildə olur:

$$A_D = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_m \\ \hline P_1 & P_2 & \ldots & P_n & Z \end{array}\right) \tag{7.4}$$

Qoşma məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \to \min; \tag{7.5}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \geq P_1, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \geq P_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \geq P_m. \end{cases} \tag{7.6}$$

Məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0. \tag{7.7}$$

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ məchulları üçün elə qiymətlər tapmalı ki, onlar (7.6) – (7.7) şərtlərini ödəsin, (7.5) xətti funksiyasına isə minimum qiymət versinlər.

Qeyd. Qoşma məsələnin $u_1, u_2, \ldots, u_m$ məchulları obyektiv şərtləşdirilmiş və ya qoşma qiymətlər adlanır.

(7.5) – (7.7) qoşma məsələsinin qoyuluşundan onun genişləndirilmiş matrisini

$$A_Q = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} & P_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} & P_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} & P_n \\ \hline a_1 & a_2 & \ldots & a_m & W \end{array}\right), \tag{7.8}$$

şəklində alırıq. Burada A_Q matrisi A_D matrisinin transponirə edilmişidir, yəni $A_Q = A_D^T$.

Qeyd edək ki, qarşılıqlı qoşma olan məsələlər cütündən hər biri müstəqil xətti proqramlaşdırma məsələsidir və digərindən asılı olmadan həll edilə bilər. Lakin, sonralar göstərəcəyimiz kimi, onlardan hər hansı birini simpleks üsulu ilə həll etsək, onda ona qoşma olan digər məsələ də həll edilmiş olur.

Yuxarıda göstərilənləri nəzərə alıb, ***simmetrik qoşma məsələlərin tərtibi üçün aşağıdakı ümumi qaydaları təklif etmək olar:***

Qayda 1. Düz məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin bütün bərabərsizlikləri eyni mənaya gətirilir:

əgər düz məsələdə məqsəd funksiyası üçün maksimum qiymət axtarılırsa, onda məhdudiyyət şərtlərinin bütün bərabərsizlikləri «≤» şəkılində, minimum qiymət axtarıldıqda isə - «≥» şəkilində ifadə edilir.

Bu məqsədlə, verilmiş tələbləri ödəməyən bərabərsizliklərin hər tərəfi (-1) - ə vurulur.

Qayda 2. Düz məsələnin A_D genişləndirilmiş matrisi tərtib edilir.

Qayda 3. A_D матrisini transponirə etməklə qoşma məsələnin A_Q genişləndirilmiş matrisi tapılır, daha doğrusu

$$A_Q = A_D^T \text{ olur.} \qquad (7.9)$$

Qayda 4. Qoşma məsələdə məchulların sayı düz məsələdəki məhdudiyyət şərtlərinin sayına, onun məhdudiyyət şərtlərinin sayı isə, əksinə, düz məsələdə verilmiş məchulların sayına bərabərdir.

Qayda 5. Qoşma məsələnin məqsəd funksiyasında məchulların əmsalları düz məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin sərbəst hədləri və əksinə, qoşma məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəfləri isə düz məsələnin məqsəd funksiyasında məchulların əmsallarından ibarətdir.

Qayda 6. Qoşma məsələnin məqsəd funksiyası üçün ekstremum qiymətin axtarılması düz məsələnin məqsəd funksiyası üçün ekstremum qiymətin axtarılmasına əks qaydada aparılmalıdır, daha doğrusu

əgər $Z(x) \to \max$ olarsa, onda $W(u) \to \min$,

və əgər $Z(x) \to \min$ olarsa, onda $W(u) \to \max$ olmalıdır.

Qayda 7. Düz məsələdə verilmiş hər bir bərabərsizlikdən ibarət məhdudiyyət şərtinə qoşma məsələdə məchul

uyğundur. Bu zaman məchulun nömrəsi bərabərsizliyin nömrəsi ilə eynidir və o mənfi olmamaq şərtini ödəməlidir.

7.1.2. Qeyri - simmetrik qoşma məsələlərin tərtibi üçün ümumi qaydalar

XP – nin aşağıdakı bir cüt qarşılıqlı qoşma olan məsələlərinə baxaq:

Düz məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots + P_nX_n \to \max; \qquad (7.10)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le a_k. \end{cases} \qquad (7.11)$$

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = a_{k+1}, \\ \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m. \end{cases} \qquad (7.12)$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_l \ge 0, \qquad (l \le n). \qquad (7.13)$$

Qoşma məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \to \min; \qquad (7.14)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge P_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1l}u_1 + a_{2l}u_2 + \ldots + a_{ml}u_m \ge P_l. \end{cases} \qquad (7.15)$$

$$\begin{cases} a_{1,l+1}u_1 + a_{2,l+1}u_2 + \ldots + a_{m,l+1}u_m = P_{l+1}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m = P_n. \end{cases} \qquad (7.16)$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \ldots, u_k \geq 0, \quad (k \leq m). \qquad (7.17)$$

Qoyuluşdan göründüyü kimi, baxdığımız qoşma məsələlər bir cüt simmetrik qoşma məsələlərdən iki xüsusiyyətinə nəzərən fərqlənirlər:

1) məhdudiyyət şərtləri həm bərabərsizlik, həm də bərabərliklərdən ibarətdir;
2) heç də bütün məchulların işarələri üzərinə mənfi olmamaq şərtləri qoyulmur.

Beləliklə, qeyri-simmetrik qoşma məsələlərin tərtibi üçün ümumi qaydalar yuxarıda verilmiş 1 – 7 qaydalarına həmçinin aşağıdakı qaydanı da əlavə etməklə alınır:

Qayda 8. Düz məsələdə verilmiş hər bir bərabərlikdən ibarət məhdudiyyət şərtinə qoşma məsələdə ixtiyari işarəyə malik məchul uyğundur və əksinə, düz məsələdə işarəsi üzərinə şərt qoyulmayan hər bir məchula qoşma məsələdə bərabərlikdən ibarət məhdudiyyət şərti uyğundur.

Yuxarıda göstərilənləri ümumiləşdirib belə nəticəyə gəlmək olar ki, xətti proqramlaşdırmanın qoşmalıq nəzəriyyəsində dörd cüt qarşılıqlı qoşma məsələlərdən istifadə olunur. Onları matris şəkilində göstərək:

Düz məsələ	***Qoşma məsələ***
	Simmetrik cütlər
I. Məqsəd funksiyası	Məqsəd funksiyası
$Z(x) = PX \to \max,$	$W(u) = UA_o \to \min,$
məhdudiyyət şərtləri	məhdudiyyət şərtləri
$AX \leq A_o,$	$UA \geq P,$
məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər	məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər
$x \geq o.$	$U \geq o.$

II. Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = PX \to \min,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$AX \geq A_o,$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$x \geq o.$$

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = UA_o \to \max,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$UA \leq P,$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$U \geq o.$$

Qeyri - simmetrik cütlər

III. Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = PX \to \max,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$AX = A_o,$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$x \geq o.$$

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = UA_o \to \min,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$UA \geq P.$$

IV. Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = PX \to \min,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$AX = A_o,$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$x \geq o.$$

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = UA_o \to \max,$$

məhdudiyyət şərtləri

$$UA \leq P.$$

Burada

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ A_0=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$P=(P_1,P_2,\dots,P_n),\ U=(U_1,U_2,\dots,U_m).$$

7.1.3. Qoşma məsələlərin tərtib edilməsinə aid misal

***Misal.* Verilmiş düz məsələyə uyğun qoşma məsələni tərtib edin:**

Məqsəd funksiyası

$$Z(x)=14x_1-x_2+5x_3\rightarrow \max; \tag{7.18}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 3x_1-7x_2+4x_3\le 16, \\ -2x_1+6x_2-\ \ x_3\ge 8, \\ \qquad 3x_2-5x_3=12, \\ \ x_1-6x_2+2x_3\ge -10. \end{cases} \tag{7.19}$$

Məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0 \tag{7.20}$$

Həlli

(7.18) – (7.20) düz məsələsinin (7.19) məhdudiyyət şərtləri həm bərabərsizlik, həm də bərabərliklərdən ibarətdir. Ona görə də biz qeyri-simmetrik qoşma məsələlərin tərtibi üçün 1 – 8 ümumi qaydalarından istifadə etməliyik.

1. Düz məsələ «max» XP məsələsi olduğundan (7.19) şərtlərinin bütün bərabərsizliklərini «≤» şəklində yazaq. Bunun üçün ikinci və dördüncü bərabərsizliklərin hər tərəfini (-1) - ə vuraq. Onda aşağıdakı eynigüclü məhdudiyyət şərtlərini alırıq:

$$\begin{cases} 3x_1-7x_2+4x_3\le 16, \\ 2x_1-6x_2+\ x_3\le -8, \\ \qquad 3x_2-5x_3=12, \\ -x_1+6x_2-2x_3\le 10. \end{cases} \tag{7.21}$$

2. Düz məsələnin genişləndirilmiş matrisini tərtib edək:

$$A_D=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 4 & 16 \\ 2 & -6 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -5 & 12 \\ -1 & 6 & -2 & 10 \\ \hline 14 & -1 & 5 & Z \end{array}\right) \tag{7.22}$$

3. (7.22) matrisini transponirə edirik və qoşma məsələnin genişləndirilmiş matrisini tapırıq:

$$\begin{array}{c} A_Q=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -1 & 14 \\ -7 & -6 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & -2 & 5 \\ \hline 16 & -8 & 12 & 10 & W \end{array}\right) \\ \quad\ \ u_1 \quad\ u_2 \quad u_3 \quad u_4 \end{array} \tag{7.23}$$

4. Qoşma məsələnin (u_1, u_2, u_3, u_4) məchullarının sayı 4-ə, daha doğrusu düz məsələnin (7.19) yaxud (7.21) məhdudiyyət şərtlərinin sayına bərabərdir. Qoşma məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin sayı isə 3-ə, daha doğrusu düz məsələnin (x_1, x_2, x_3) məchullarının sayına bərabərdir.

5. Düz məsələnin sərbəst hədləri, yəni (7.21) şərtlərinin (16, -8, 12, 10) sağ tərəfləri qoşma məsələnin müvafiq (u_1, u_2, u_3, u_4) məchullarına vurulur və toplanır. Nəticədə qoşma məsələnin

$$W(u) = 16u_1 - 8u_2 + 12u_3 + 10u_4$$

məqsəd funksiyası alınır.

Bu zaman düz məsələnin Z(x) məqsəd funksiyasının (7.18)-də verilmiş (14, -1, 5) əmsalları qoşma məsələdə sərbəst hədlər, yəni məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəfləri olur.

6. $Z(x) \to \max$ olduğundan qoşma məsələdə

$W(u) = 16u_1 - 8u_2 + 12u_3 + 10u_4 \to \min$ olur.

7. Düz məsələnin (7.21) məhdudiyyət şərtlərində verilmiş bərabərsizliklərə qoşma məsələdə

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_4 \geq 0$$

mənfi olmayan məchulları uyğundur.

Düz məsələnin mənfi olmayan $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ məchullarına qoşma məsələdə «≥» şəkilində bərabərsizliklər uyğundur, belə ki, qoşma məsələ «min» XP məsələsidir. Qoşma məsələnin məhdudiyyət şərtlərini almaq məqsədi ilə (7.23) matrisinin birinci, ikinci və üçüncü sətir elementləri müvafiq u_1, u_2, u_3, u_4 məchullarına vurulur, toplanır və nəticələr sərbəst hədlərlə müqayisə edilir:

$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 \qquad\qquad - u_4 \geq 14, \\ -7u_1 - 6u_2 + 3u_3 + 6u_4 \geq -1, \\ 4u_1 + \ \ u_2 - 5u_3 - 2u_4 \geq 5 \end{cases}$$

8. (7.21) sisteminə daxil olan $3x_2 - 5x_3 = 12$ bərabərliyinə (tənliyinə) qoşma məsələdə ixtiyari işarəyə malik u_3 məchulu, daha doğrusu $u_3 \geq 0$ (≤ 0) uyğundur.

Beləliklə, qoşma məsələ aşağıdakı şəkildə alınır:

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = 16u_1 - 8u_2 + 12u_3 + 10u_4 \to \min. \qquad (7.24)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 \qquad\qquad - u_4 \geq 14, \\ -7u_1 - 6u_2 + 3u_3 + 6u_4 \geq -1, \\ 4u_1 + \ u_2 - 5u_3 - 2u_4 \geq 5. \end{cases} \qquad (7.25)$$

Məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_4 \geq 0. \qquad (7.26)$$

Qeyd edək ki, (7.18) - (1.20) və (1.24) - (1.26) məsələləri xətti proqramlaşdırmanın qarşılıqlı qoşma olan qeyri-simmetrik məsələlər cütünü təşkil edirlər.

7.2. Qoşma cədvəllər

Tutaq ki, (7.1) - (7.3) və (7.5) – (7.7) simmetrik qarşılıqlı qoşma XP məsələləri verilmişdir. Onlardan hər birini simpleks üsulu həll etmək üçün məsələ kanonik şəkildə yazılmalıdır. Bu məqsədlə (7.2) məhdudiyyət şərtlərinə m sayda mənfi olmayan elə $y_1, y_2, \ldots, y_m$ asılı məchulları daxil edilir ki, onlar aşağıdakı bərabərlik şərtlərini ödəsinlər:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = a_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = a_m \end{cases}$$

Onda ***düz məsələni*** aşağıdakı kimi alırıq:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots + P_nX_n \rightarrow \max; \qquad (7.27)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} y_1 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + a_1 \geq 0, \\ y_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + a_2 \geq 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_m = -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n + a_m \geq 0. \end{cases} \qquad (7.28)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \qquad (7.29)$$

(7.27) – (7.29) düz məsələsini cədvəl şəkilində göstərək:

	$-x_1$		$-x_s$		$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	a_1
...						
$\rightarrow y_r =$	a_{r1}		$\boxed{a_{rs}}$		a_{rn}	a_r
$y_m =$	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	a_m
$Z =$	$-P_1$	...	$-P_s$	...	$-P_n$	0

(7.30)

Fərz edək ki, $\alpha_{rs} \neq 0$. Onu əsas element olaraq götürüb DJƏ-nin bir addımını tətbiq edək. Bu zaman y_r asılı məchulu ilə x_s asılı olmayan məchulu öz rollarını, həmçinin yerlərini qarşılıqlı surətdə dəyişir və nəticədə aşağıdakı cədvəli alırıq:

	$-x_1$	$\dots$	$-y_r$	$\dots$	$-x_n$	1	
$y_1 =$	b_{11}	$\dots$	$-a_{1s}$	$\dots$	b_{1n}	b_1	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$x_s =$	a_{r1}	$\dots$	1	$\dots$	a_{rn}	a_r	$: a_{rs}$ (7.31)
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$y_m =$	b_{m1}	$\dots$	$-a_{ms}$	$\dots$	b_{mn}	b_m	
$Z =$	q_1	$\dots$	$-P_s$	$\dots$	q_n	Q	

burada $b_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \alpha_{rs} - \alpha_{is} \cdot \alpha_{rj}; \quad (i \neq r, j \neq s);$ (7.32)

$$b_i = a_i \cdot \alpha_{rs} - \alpha_{is} \cdot a_r; \quad (i \neq r). \tag{7.33}$$

$$q_j = P_j \cdot \alpha_{rs} - \alpha_{rj} \cdot P_s; \quad (j \neq s). \tag{7.34}$$

$$Q = 0 \cdot \alpha_{rs} - (-P_s) \cdot \alpha_r. \tag{7.35}$$

Oxşar qayda ilə (7.6) məhdudiyyət şərtlərinə n sayda $v_1, v_2, \dots, v_n$ asılı məchulları daxil edilir və onlar aşağıdakı bərabərlik şərtlərini ödəyirlər:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m - v_1 = P_1, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m - v_2 = P_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m - v_n = P_n. \end{cases}$$

Bu zaman ***qoşma məsələ*** aşağıdakı kimi alınır:

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m \to \text{mim}; \tag{7.36}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} V_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - P_1 \geq 0, \\ V_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - P_2 \geq 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ V_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m - P_n \geq 0 \end{cases} \tag{7.37}$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0. \tag{7.38}$$

(7.36) – (7.38) qoşma məsələsini cədvəl şəkilində elə yazaq ki, bu zaman u_i $(i=\overline{1,m})$ asılı olmayan məchulları cədvəlin solunda, V_j $(j=\overline{1,n})$ asılı məchulları isə onun yuxarısında yerləşsinlər:

	$V_1=$	. . .	$\downarrow V_s=$	. . .	$V_n=$	$W=$
u_1	a_{11}	. . .	a_{1s}	. . .	a_{1n}	a_1
. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
$\rightarrow u_r$	a_{r1}	. . .	$\boxed{a_{rs}}$	. . .	a_{rn}	a_r
. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
u_m	a_{m1}		a_{ms}		a_{mn}	a_m
1	$-P_1$	. . .	$-P_s$	. . .	$-P_n$	0

(7.39)

$a_{rs} \neq 0$ əsas elementinə nəzərən AJƏ-nin bir addımını tətbiq edək. Onda V_s asılı məchulu və u_r asılı olmayan məchulu öz rollarını, həmçinin yerlərini qarşılıqlı surətdə dəyişir və nəticədə aşağıdakı cədvəli alırıq:

	$V_1=$		$u_r=$		$V_n=$	$W=$	
u_1	b_{11}	...	$-a_{1s}$	...	b_{1n}	b_1	
	...		...		...	...	
→ V_s	a_{r1}	...	1	...	a_{rn}	a_r	$: a_{rs}$
	...		...		...	...	
u_m	b_{m1}	...	$-a_{ms}$	...	b_{mn}	b_m	
1	q_1	...	P_s	...	q_n	Q	

Qeyd edək ki, yeni cədvəldəki kəmiyyətlər də cədvəl (7.31) - də verilmiş kəmiyyətlər kimi oxşar (7.32) – (7.35) münasibətləri ilə hesablanırlar.

Beləliklə alırıq ki, düz məsələnin (7.30) cədvəlinldə $a_{rs} \neq 0$ əsas elementinə nəzərən DJƏ addımının tətbiqi, qoşma məsələnin (7.396) cədvəlində tətbiq edilən AJƏ addımı ilə eynigüclüdür.

Tərif 7.2. ***(7.27) – (7.29) və (7.36) – (7.38) qarşılıqlı qoşma XP məsələlərinin uyğun olaraq (7.30) və (7.39) cədvəllərinə qoşma cədvəllər deyilir.***

Ona görə də (7.1) - (7.3) və (7.5) – (7.7) simmetrik qarşılıqlı qoşma məsələlər cütünü vahid cədvəl şəkilində göstərmək məqsədəuyğundur:

		$V_1=$		$V_s=$		$V_n=$	$W=$	
		$-x_1$	...	$-x_s$	...	$-x_n$	1	
u_1	$y_1=$	a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	a_1	
		...		...		...	...	
→ u_r	$y_r=$	a_{r1}	...	$\boxed{a_{rs}}$	...	a_{rn}	a_r	(7.40)
		...		...		...	...	
u_m	$y_m=$	a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	a_m	
1	$Z=$	$-P_1$	...	$-P_s$	...	$-P_n$	0	

(7.40) cədvəlindən göründüyü kimi, burada qarşılıqlı qoşma məsələlərdən birinin asılı olmayan məchulları və digər məsələnin asılı məchulları arasında qarşılıqlı uyğunluq bərpa edilir (bax cədvəl 7.1).

Cədvəl 7.1.

(7.1) – (7.3) düz məsələsinin məchulları	
Asılı olmayan	Asılı olan
$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_s \quad \ldots \quad x_n$	$y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_r \quad \ldots \quad y_m$
$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow$	$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow$
$v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_s \quad \ldots \quad v_n$	$u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_r \quad \ldots \quad u_m$
Asılı olan	Asılı olmayan
(7.36) – (7.38) qoşma məsələsinin məchulları	

Beləliklə, Jordan əvəzetməsinin (7.40) cədvəlinə nəzərən aparılmış müvafiq addımı hər iki qoşma cədvəlin eyni zamanda lazımi şəkildə çevrilməsinə səbəb olur.

Deməli, sonralar göstəriciyimiz kimi, xətti proqramlaşdırmanın (7.1) – (7.3) düz məsələsini simpleks üsulu ilə həll etsək, biz eyni zamanda (7.36) – (7.38) qoşma məsələsini də həll etmiş oluruq və əksinə. Burada həmçinin düz məsələnin həlli nəticəsində Z(X) məqsəd funksiyası üçün alınmış maksimum qiymət, qoşma məsələnin W(U) məqsəd funksiyası üçün axtarılan minimum qiymətə bərabər olur.

7.3. Qoşmalıq teoremləri

7.3.1. Qoşmalığın birinci (əsas) teoremi

Qoşmalıq teoremləri bir cüt qarşılıqlı qoşma XP məsələlərinin optimal həlləri arasında əlaqə yaratmağa imkan verirlər. Belə ki, qoşma məsələlərdən hər hansı birini həll etməklə, ya digər məsələni həll etmədən, onun da optimal həlli tapılır, ya da həmin məsələnin həllinin olmadığı müəyyən edilir. Daha doğrusu aşağıdakı hallar mümkündür:

1) qarşılıqlı qoşma məsələlər cütünə daxil olan hər iki məsələnin optimal həlləri vardir;
2) məsələlərdən birinin məqsəd funksiyasının qeyri-məhdud olduğu, digərinin isə məhdudiyyət şərtləri sisteminin birgə (uyuşan) olmadığı üçün həlləri yoxdur.

Teorem. O, iki hissədən ibarətdir:

1. Əgər bir cüt qarşılıqlı qoşma XP məsələlərindən birinin optimal həlli vardırsa, onda ona qoşma olan digər məsələnin də optimal həlli vardır və məqsəd funksiyalarının ekstremum qiymətləri bərabərdir:

$$Z_{\max} = W_{\min} \text{ yaxud } Z(x^*) = W(u^*). \qquad (7.41)$$

2. Əgər qoşma məsələlərdən birinin məqsəd funksiyası məhdud olmazsa, onda digər məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir.

Burada x^* - düz məsələnin optimal həlli,

u^* - isə qoşma məsələnin optimal həllidir.

İsbatı. Teoremin birinci hissəsini isbat edək.

Tutaq ki, (7.40) bir cüt qarşılıqlı qoşma XP məsələləri verilmişdir. Fərz edək ki, düz məsələnin optimal həlli var və onun axtarılması prosesində (7.40) - dən aşağıdakı nəticə cədvəli alınmışdır

	$u_1=$ $-y_1$	. . .	$u_s=$ $-y_s$	$V_{s+1}=$ $-x_{s+1}$	. . .	$V_n=$ $-x_n$	$W=$ 1
$V_1\ \ x_1=$	b_{11}	. . .	b_{1s}	$b_{1,s+1}$	. . .	b_{1n}	b_1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$V_s\ \ x_s=$	b_{s1}	. . .	b_{ss}	$b_{s,s+1}$	. . .	b_{sn}	b_s
$u_{s+1}\ \ y_{s+1}=$	$b_{s+1,1}$	. . .	$b_{s+1,s}$	$b_{s+1,s+1}$	. . .	$b_{s+1,n}$	b_{s+1}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$u_m\ \ y_m=$	b_{m1}	. . .	b_{ms}	$b_{m,s+1}$	. . .	b_{mn}	b_m
$1\ \ Z=$	q_1	. . .	q_s	q_{s+1}	. . .	q_n	Q

(7.42)

Burada bütün sərbəst hədlər mənfi deyildirlər, yəni

$$b_1 \geq 0,\dots,b_m \geq 0 \qquad (7.43)$$

və həmçinin $Z-$ sətir əmsalları

$$q_1 \geq 0,\dots,q_n \geq 0 \qquad (7.44)$$

şərtlərini ödəyirlər.

Deməli, $y_1^* = \dots = y_s^* = \underbrace{x_{s+1}^* = \dots = x_n^* = 0}$

yaxud $x^* = \left(x_1^* = b_1,\dots,x_s^* = b_s, x_{s+1}^* = 0,\dots,x_n^* = 0\right)$

(7.45) düz məsələnin optimal həllidir və

$$Z_{\max} = Z(x^*) = Q \qquad (7.46)$$

Bununla bərabər qoşma məsələyə uyğun alınmış cədvəli təhlil edək. Cədvəlin solunda yerləşən məchulların qiymətlərini sıfıra bərabər götürək, yəni

$$v_1 = \dots = v_s = \underbrace{u_{s+1} = 0,\dots,u_m = 0}.$$

Onda alarıq:

$$u_1 = q_1 \geq 0,\dots,u_s = q_s \geq 0, \qquad (7.47)$$

$$v_{s+1} = q_{s+1} \geq 0,\dots,v_n = q_n \geq 0, \qquad (7.48)$$

Deməli,

$$u_1 = q_1,\dots,u_s = q_s, u_{s+1} = 0,\dots,u_m = 0 \qquad (7.49)$$

qoşma məsələnin dayaq həlli olacaqdır.

(7.42) cədvəlinin sonuncu sütunundan məqsəd funksiyası üçün alırıq:

$$W = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s + b_{s+1} u_{s+1} + \dots + b_m u_m + Q \qquad (7.50)$$

(7.43) şərtləri ödənildiyi üçün, yalnız

$$v_1 = \dots = v_s = u_{s+1} = \dots = u_m = 0 \qquad (7.51)$$

qiymətlərində (7.50) funksiyası ən kiçik qiymət alacaqdır və

$$W_{\min} = Q.$$

Beləliklə,

$$u^* = \left(u_1^* = q_1,\dots,u_s^* = q_s, u_{s+1}^* = 0,\dots,u_m^* = 0\right) \qquad (7.52)$$

dayaq həlli qoşma məsələnin həm də optimal həllidir və bu zaman

$$Z_{max} = W_{min} = Q \quad \text{yaxud} \quad Z(x^*) = W(u^*) = Q .$$

İndi isə teoremin ikinci hissəsini isbat edək.

Fərz edək ki, düz məsələnin Z(x) məqsəd funksiyası yuxarıdan məhdud deyil, yəni $Z_{max} \to +\infty$, belə ki, «max» XP məsələsi verilmişdir. Bu o deməkdir ki, (7.42) cədvəlinin Z - sətrində $q_s < 0$ mənfi əmsalının yerləşdiyi s – sütununda heç bir müsbət element yoxdur, yəni:

$$b_{1s} \le 0, \ldots, b_{ms} \le 0 .$$

Onda qoşma məsələnin cədvəlindən alırıq

$$u_s = b_{1s}v_1 + \ldots + b_{ss}v_s + b_{s+1,s}u_{s+1} + \ldots + b_{ms}u_m + q_s \le q_s < 0$$

$u_s < 0$ şərti $v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_m$ məchullarının mənfi olmaması şərtləri ilə birgə olmadığından alırıq ki, qoşma məsələnin şərtləri ziddiyyətlidir. Teorem isbat olundu.

Qeyd 7.2. Məsələlərdən hər hansı birinin şərtlərinin ziddiyyətli olmasından heç də həmişə qoşma məsələnin məqsəd funksiyasının qeyri-məhdud olması alınmır. Məlum olur ki, bu halda qoşma məsələnin şərtləri də ziddiyyətli ola bilərlər.

7.3.2. Qoşmahğın əsas bərabərsizliyi

(7.1) – (7.3) və (7.5) - (7.7) qarşılıqlı qoşma XP məsələlərinin «Σ» işarəsindən istifadə etməklə, qısa yazılış formalarını nəzərdən keçirək:

Düz məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x)=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max; \tag{7.53}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le a_i, \quad (i=\overline{1,m}); \tag{7.54}$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}). \tag{7.55}$$

Qoşma məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$W(u)=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \min; \tag{7.56}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i \ge p_j, \quad (j=\overline{1,n}); \tag{7.56'}$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$u_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,m}). \tag{7.56''}$$

Teorem 7.2. Düz və qoşma məsələlərin uyğun olaraq istənilən iki $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ***və*** $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)$ ***mümkün həlləri üçün***

$$Z(x)\le W(u) \quad \text{yaxud} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i u_i . \tag{7.57}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı. Düz məsələnin (7.52) məhdudiyyət şərtlərinin hər iki tərəfini müvafiq $u_1,u_2,...,u_m$ məchullarına vurub, alınmış bərabərsizliklərin sağ və sol tərəflərini cəmləsək, yaza bilərik:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i u_i . \qquad (7.58)$$

Oxşar qayda ilə qoşma məsələnin (7.56) məhdudiyyət şərtlərinə daxil olan bərabərsizliklərin hər iki tərəfini müvafiq $x_1, x_2,...,x_n$ məchullarına vurub və sonra onları cəmləsək, alarıq:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge \sum_{j=1}^{n} p_j x_j . \qquad (7.59)$$

(7.58) və (7.59) bərabərsizliklərinin sol tərəfləri eyni bir $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j u_i$ ifadəyə bərabərdir. Onda bərabərsizliklərin tranzitivlik qaydasına əsasən (7.57) bərabərsizliyinin doğruluğunu almış oluruq. Teorem isbat olundu.

(7.57) – yə qoşmalılığın əsas bərabərsizliyi deyilir.

Həllərin optimal olması üçün kafi şərt

Teorem 7.3. Əgər qarşılıqlı qoşma məsələlərin $x^* = (x_1^*, x_2^*,...,x_n^*)$ ***və*** $u^* = (u_1^*, u_2^*,...,u_m^*)$ ***uyğun mümkün həllərində***

$$Z(x^*) = W(u^*) \qquad (7.60)$$

bərabərliyi ödənirsə, onda

x^* ***– düz məsələnin optimal həlli,***

u^* ***- isə qoşma məsələnin optimal həllidir.***

İsbatı. Tutaq ki, x_1 - düz məsələnin istəmlən mümkün həllidir. Onda (7.57) əsas bərabərsizliyini nəzərə alib, yaza bilərik:

$$Z(x_1) \le W(u^*).$$

(7.60)-a əsasən həmçinin $Z(x_1) \le Z(x^*)$ olur. x_1 - düz məsələnin istənilən mümkün həlli olduğundan, sonuncu bərabərsizliyə əsasən alırıq ki, x^* - düz məsələnin optimal həllidir.

Oxşar qayda ilə isbat edilir ki, u^* - qoşma məsələnin optimal həllidir.

Doğrudan da tutaq ki, u_1 – qoşma məsələnin istənilən mümkün həllidir. Onda qoşmalığın (7.57) əsas bərabərsizliyindən

$$W(u_1) \ge Z(x^*) \quad \text{alırıq.}$$

Beləliklə, qoşma məsələnin ixtiyari u_1 mümkün həlli üçün, (7.60) bərabərliyinə əsasən, həmçinin

$$W(u_1) \ge W(u^*)$$

şərti ödənilir. Deməli, u^* - qoşma məsələnin optimal həllidir. Teorem isbat olundu.

7.3.3. Qoşmalığın ikinci teoremi

Tutaq ki, (7.1) – (7.3) və (7.5) – (7.7) bir cüt qarşılıqlı qoşma olan XP məsələləri verilmişdir.

Hər iki qarşılıqli qoşma məsələlər arasındakı sıx əlaqə, qoşmalığın birinci (əsas) teoremində göstərildiyi kimi, yalnız onların məqsəd funksiyalarının ekstremum qiymətlərinin bir-birinə bərabər olmasından ibarət deyildir. Burada həmçinin qoşmalığın ikinci teoremi də mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Teorem 7.4. *$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ və $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$* ***mümkün həllərinin qarşılıqlı qoşma məsələlərin uyğun olaraq optimal həlləri olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı bərabərliklərin ödənllməsindən ibarətdir:***

$$a) \quad x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* - p_j\right) = 0, \quad (j = \overline{1,n});$$

$$b) \quad u_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - a_i\right) = 0, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Başqa sözlə desək, əgər optimal həllin koordinatlarını yerinə yazdıqda, düz məsələnin i məhdudiyyət şərti ciddi bərabərsizlik kimi ödənirsə, yəni $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < a_i$ olarsa, onda qoşma məsələnin optimal həllinin müvafiq i koordinatı sıfıra bərabər olur, yəni $u_i^* = 0$.

Əksinə, əgər qoşma məsələnin optimal həllinin i koordinatı sıfırdan fərqli, yəni $u_i^* > 0$ olarsa, onda optimal həlldə düz məsələnin i məhdudiyyət şərti bərabərlik kimi ödənir, yəni $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = a_i$ olur.

Oxşar qayda ilə alırıq ki,

əgər $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* > p_j$, onda $x_j^* = 0$,

və əgər $x_j^* > 0$ olarsa, onda $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* = p_j$.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ və $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ - uyğun olaraq (7.1) – (7.3) və (7.5) – (7.7) qarşılıqlı qoşma məsələlərinin optimal həlləridir. İsbat edək ki, a) və b) bərabərlikləri ödənilir.

x^* və u^* optimal həllərini qoşma məsələlərin məhdudiyyət şərtlərində yerinə yazaq:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* \le a_i, \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.61}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \ge p_j, \quad (j = \overline{1,n}). \tag{7.62}$$

Daha sonra (7.61) şərtlərinin hər tərəfini qoşma məsələnin uyğun u_i^*, $(i = \overline{1,m})$ məchullarına, (7.62) şərtlərinin hər tərəfini isə düz məsələnin uyğun x_j^*, $(j = \overline{1,n})$ məchullarına vuraq və alınmış bərabərsizlikləri cəmləyək.

Onda alarıq:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* \le \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* ; \qquad (7.63)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* . \qquad (7.64)$$

(7.63) və (7.64) münasibətlərindən yaza bilərik:

$$Z(x^*) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* \le \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* = W(u^*) . \qquad (7.65)$$

x^* və u^* optimal həllər olduğundan qoşmalığın birinci teoreminə əsasən $Z(x^*) = W(u^*)$. Ona görə də (7.65) münasibətində bütün «$\le$» işarələri «=» ilə əvəz edilməlidir, yəni

$$Z(x^*) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* = W(u^*) . \qquad (7.66)$$

Buradan alırıq ki,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j^* (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - p_j) = 0 . \qquad (7.67)$$

$x_j^* \ge 0$ və $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \ge p_j$ olduğu üçün, aydındır ki, $x_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - p_j) \ge 0$ olacaqdır. Deməli, (7.67) - dən belə nəticəyə gəlirik ki, mənfi olmayan toplananların cəmi sıfıra bərabərdir. Bu yalnız o halda mümkündür ki, toplananlardan hər biri sıfıra bərabər olsun, yəni

$$x_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - p_j) = 0 , \qquad (j = \overline{1,n}).$$

a) bərabərliklərinin ödənildiyi isbat olundu.

Oxşar qayda ilə b) bərabərliklərinin ödənildiyi də isbat olunur. Doğrudan da, (7.66) münasibətindən istifadə edib yaza bilərik:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - a_i \right) = 0 . \qquad (7.68)$$

Nəzərə alsaq ki, $u_i^* \ge 0$ və $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le a_i$, onda $u_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - a_i) \le 0$ olur. Beləliklə, (7.68) - dən alırıq ki, müsbət olmayan toplananların cəmi sıfıra bərabərdir. Bu isə yalnız o halda mümkündür ki, hər bir toplanan sıfıra bərabər olsun, yəni

$$u_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - a_i) = 0 , \; (i = \overline{1,m}).$$

Deməli, b) bərabərlikləri ödənilir. Zərurilik isbat olundu.

Kafilik. Tutaq ki, a) və b) bərabərlikləri ödənilir. İsbat edək ki, bu halda $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ və $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*)$ mümkün həlləri verilmiş qarşılıqlı qoşma məsələlərin uyğun olaraq həm də optimal həlləridir.

a) bərabərliklərini j indeksi, b) bərabərliklərini isə i indeksi üzrə cəmləsək, onda aşağıdakı müvafiq münasibətləri alarıq:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - p_j \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = Z(x^*) , \qquad (7.69)$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - a_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^* = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* = W(u^*) , \qquad (7.70)$$

(7.69) və (7.70) münasibətlərinin sol tərəfləri eyni bir $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* u_i^*$ kəmiyyətinə bərabər olduğundan, onların sağ tərəfləri də bir-birinə bərabər olmalıdır, yəni

$$Z(x^*) = W(u^*) \qquad (7.71)$$

Onda mümükün həllərin optimal olması üçün (7.71) kafilik şərtinə əsasən alırıq ki, qarşılıqlı qoşma məsələlərin məqsəd funksiyalarının ekstremum qiymətləri yalnız müvafiq optimal həllərdə bir-birinə bərabərdirlər. Deməli, x^* və u^* müvafiq olaraq düz və qoşma məsələlərin optimal həlləridir. Teorem isbat olundu.

Qeyd 7.3. Asanlıqla göstərmək olar ki, ilk qoyuluşda daha ümumi görünən, qeyri-simmetrik məsələlər müvafiq simmetrik məsələlərə gətirilə bilər. Beləliklə, qoşmalığın birinci (əsas) teoremi həm də qeyri-simmetrik qoşma məsələlər üçün də doğrudur. İkinci teorem isə qoşma məsələlərdə şərtlər bərabərsizliklədən ibarət olduqda və məchulların mənfi olmadığı fərz edildikdə doğru olur.

7.3.4. Qoşmalığın üçüncü teoremi

Fərz edək ki, bir cüt qarşılıqlı qoşma olan (7.1) – (7.3.) və (7.5) – (7.7) məsələləri verilmişdir.

Digər bir teoremə də baxaq və onun nəticələri sonradan istifadə olunacaqdır.

Teorem 7.5. Qoşma məsələnin optimal həllindəki $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$ ***məchullarının qiymətləri düz məsələnin məhdudiyyət şərtlərindəki*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ***sərbəst hədlərinin*** $\Delta Z_i(x^*)$ ***kəmiyyətlnə təsirinin qiymətlərini əks etdirirlər, yəni***

$$\Delta Z_i(x^*) = \Delta a_i \cdot u_i^*, \qquad (i = \overline{1,m}). \tag{7.72}$$

İsbatı. (7.56) ifadəsinə uyğun olaraq qoşma məsələnin məqsəd funksiyasının minimum qiyməti

$$W_{\min} = W(u^*) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* \tag{7.73}$$

kimi təyin edilir.

a_i sərbəst həddini, çox kiçik olmaqla, Δa_i qədər elə dəyişək ki, bu zaman qoşma məsələnin tapılmış $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*)$ optimal həlli dəyişməsin.

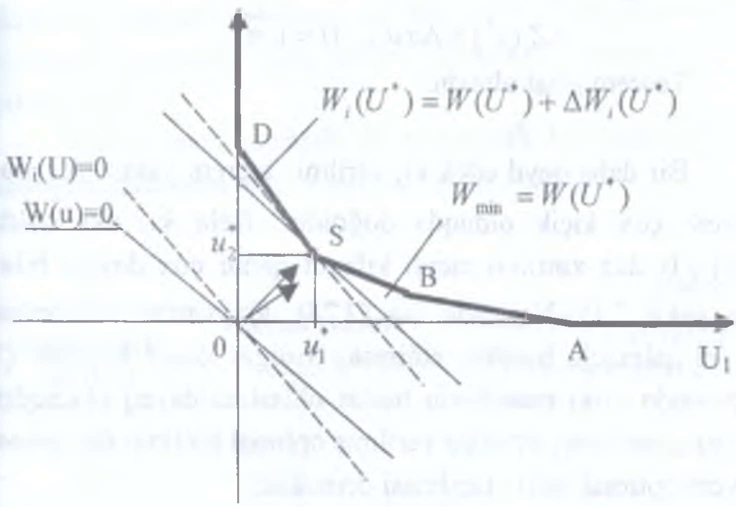
Əyanilik üçün fərz edək ki, qoşma məsələ ikiölçülüdür, yəni ona yalnız u_1 və u_2 məchulları daxildir. U_1OU_2 düzbücaqlı koordinat sistemini götürək və qoşma məsələnin həndəsi interpretasiyasını nəzərdən keçirək. Tutaq ki, məsələnin optimal həlli vardır və məqsəd funksiyasının ekstremum qiyməti mümkün həllər obslatının S kənar nöqtəsində alınır (bax şəkil 6.1), yəni

$$W_{\min} = W(s).$$

Deməli, a_i sərbəst həddinin çox kiçik olan Δa_i qədər dəyişməsinə baxmayaraq, u_1^* və u_2^* optimal qiymətləri əvvəlki kimi qalirlar. Bununla bərabər yalnız W xətti fuknksiyasının qiyməti və

$$W(u) = a_1u_1 + a_2u_2 = 0 \tag{7.74}$$

düz xəttinin müvafiq meyli müəyyən qədər dəyişir.



Şəkil 7.1

Beləliklə, Δa_i dəyişməsi nəzərə alınmaqla, qoşma məsələnin məqsəd funksiyasmın ekstremum qiymətinin meyli ümumi şəkildə aşağıdakı fərqlə tapılır:

$$\Delta W_i(u^*) = W_i(u^*) - W(u^*) = a_1u_1^* + a_2u_2^* + \ldots + (a_i + \Delta a_i)u_i^* + \ldots +$$

$$+ a_mu_m^* - (a_1u_1^* + a_2u_2^* + \ldots + a_iu_i^* + \ldots + a_mu_m^*) = \Delta a_iu_i^*,$$

yəni

$$\Delta W_i(u^*) = \Delta a_iu_i^*, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Qoşmalığın birinci teoreminə görə

$$Z_{\max} = W_{\min} \text{ yaxud } Z(x^*) = W(u^*)$$

olduğundan, alırıq ki, düz məsələnin məqsəd funksiyasının maksimum qiyməti də müvafiq olaraq dəyişir və həmin meyl aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\Delta Z_{\max} = \Delta Z_i(x^*) = \Delta W_i(u^*) = \Delta a_iu_i^*, \text{ yəni}$$

$$\Delta Z_i(x^*) = \Delta a_iu_i^*, \quad (i = \overline{1,m}).$$

Teorem isbat olundu.

Bir daha qeyd edək ki, verilmiş teorem yalnız Δa_i dəyişməsi çox kiçik olduqda doğrudur. Belə ki, əks halda $W(u) = 0$ düz xəttinin meyli kifayət qədər çox dəyişə bilər (bax şəkil 7.1). Nəticədə isə (7.74) düz xəttini özü-özünə paralel qalmaqla hərəkət etdirsək, o digər kənar nöqtədə (S nöqtəsində yox) məsələnin həllər oblastına dayaq olacaqdır. Bu isə məsələnin əvvəldə verilmiş optimal həllinin dəyişməsi və yeni optimal həllin tapılması deməkdir.

7.4. XP – nin qoşma məsələlərinin iqtisadi mənası

Məlum olduğu kimi müxtəlif iqtisadi xarakterə malik xətti proqramlaşdırma məsələləri mövcuddur. Bununla bərabər hər bir halda qoşma məsələnin iqtisadi mənası uyğun düz məsələnin verilmiş iqtisadi mənasından asılı olaraq formalaşır.

Əvvəlcə aşağıdakı misal əsasında düz məsələnin iqtisadi mənasını baxaq.

Düz məsələ. İstehsal ehtiyatlarından optimal istifadə məsələsi.

Müəssisədə A və B kimi iki növ məhsulun istehsalı üçün üç növ müxtəlif ehtiyatlardan istifadə edilir. Ehtiyatlarm miqdarları, məhsul vahidinə sərfi normaları, həmçinin məhsul vahidinin satışından əldə edilən mənfəət məlumdur (bax cədvəl 7.2).

Elə məhsul istehsalı planı tapmalı ki, hazır məhsul satışından müəssisə ən çox mənfəət əldə etsin.

Cədvəl 7.2

Ehtiyatların növləri	**Məhsul vahidinə ehtiyatların sərfi normaları, (kq)**		**Ehtiyatların miqdarı, (kq)**
	A	**B**	
I	11	3	671
II	8	4	588
III	5	3	423
Məhsul vahidindən mənfəət, (min man.)	5	2	-

Cədvəl 7.2 - də gətirilmiş ilkin məlumatlar əsasında tələb olunur:

1. Düz məsələnin riyazi modelini qurmalı və onun iqtisadi mənasını izah etməli.
2. Qoşma məsələnin riyazi modelini qurmalı və onun iqtisadi mənasını izah etməli.
3. Qarşılıqlı qoşma məsələləri həll etməli.

1. Maksimum mənfəət üzrə ehtiyatlardan optimal istifadə məsələsinin riyazi modelini quraq.

x_1 - ilə A məhsulunun istehsal planını,

x_2– ilə B məhsulunun istehsal planım işarə edək.

Onda cədvəl 7.1-in məlumatları nəzərə alınmaqla düz məsələnin riyazi modelini aşağıdakı şəkildə alırıq:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \max; \qquad (7.75)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 \le 671, & (I), \\ 8x_1 + 4x_2 \le 588, & (II), \\ 5x_1 + 3x_2 \le 423, & (III). \end{cases} \qquad (7.76)$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (7.77)$$

Riyazi nöqteyi nəzərdən (7.75) – (7.76) xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etməkdən məqsəd ona daxil olan x_1, x_2 məchulları üçün elə qiymətlər tapmaqdan ibarətdir ki, onlar (7.76), (7.77) şərtlərini ödəsin və (7.5) xətti funksiyasına maksimum qiymət versinlər.

Düz məsələnin iqtisadi mənasını izah edək.

Yazılışdan göründüyü kimi (7.75) məqsəd funksiyası istehsal olunmuş hər iki növ məhsulun satışından müəssisənin əldə etdiyi ümumi mənfəəti ifadə edir. Ona görə də bu funksiya üçün maksimum qiymət axtarılır.

(7.76) məhdudiyyət şərtləri istehsal ehtiyatları üzrə tərtib edilir. Onlardan hər biri göstərir ki, hər iki növ məhsulun istehsalı üçün istifadə olunan ehtiyatların məcmu məsarifi (bərabərsizliyin sol tərəfi) onların məhdud miqdarını (bərabərsizliyin sağ tərəfi) aşa bilməz.

Əgər şərtdə «=» («<») ödənirsə, deməli müvafiq növ ehtiyatların miqdarı istehsal prosesində tam (qalıqla) istifadə olunur.

(7.77) şərtləri məhsulların istehsal planları üzrə verilir və ona görə də müvafiq məchullar mənfi ola bilməzlər. Əgər məsələnin həlli nəticəsində $x_j > 0$ $(x_j = 0)$, $(j = 1,2)$ alınmışdırsa, deməli j növ məhsul istehsali müəssisənin ən çox ümumi mənfəət əldə etməyi nöqteyi nəzərdən sərfəlidir (sərfəli deyil).

Beləliklə, iqtisadi nöqteyi nəzərdən düz məsələni həll etməkdən məqsəd A və B məhsulları üzrə optimal istehsal planları tapmaqdan ibarətdir. Bu zaman planın yerinə yetiriləmsi üçün istehsal ehtiyatlarının verilmiş məhdud miqdarları kifayət edir və buraxılan bütün hazır məhsulun satışından müəssisə ən çox mənfəət əldə edir.

2. İndi isə qoşma məsələnin riyazi modelini quraq. Düz məsələdə (7.76) məhdudiyyət şərtləri bərabərliklər şəkilində verilir, məchulların işarələri üzərinə isə (7.77) mənfi olmamaq şərtləri qoyulur. Buna görə də simmetrik qoşma məsələlərin tərtibi üçün 1 – 7 ümumi qaydalarını tətbiq edək. Onda qoşma məsələnin riyazi modeli aşağıdakı şəkildə alınır:

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = 671u_1 + 588u_2 + 423u_3 \rightarrow \min; \qquad (7.78)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 11u_1 + 8u_2 + 5u_3 \geq 5, \\ 3u_1 + 4u_2 + 3u_3 \geq 2. \end{cases} \qquad (7.79)$$

məchulların işarələri üzərinə qoyulmuş şərtlər

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \qquad (7.80)$$

Riyazi nöqteyi nəzərdən (7.78) – (7.80) xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etməkdən məqsəd ona daxil olan u_1,u_2,u_3 məchulları üçün elə qiymətlər tapmaqdan ibarətdir ki, onlar (7.79), (7.80) şərtlərini ödəsin və (7.78) xətti funksiyasına minimum qiymət versinlər.

Qoşma məsələnin iqtisadi mənasını izah edək. Fərz edək ki, müəssisədə mövcud olan bütün istehsal ehtiyatlarını başqa bir müəssisə almaq istəyir. Bu münasibətlə aşağıdakı obyektiv mülahizələr nəzərə alınmaqla ayrı-ayrı növ ehtiyat vahidləri üzrə ən əlverişli u_1,u_2,u_3 dəyərlərini müəyyən etmək tələb olunur:

a) alıcı müəssisə çalışır ki, ehtiyatların ümumi dəyəri daha da az olsun;

b) ehtiyatlardan əldə edilən məbləğ mövcud müəssisənin hazır məhsul satışından alacağı mənfəətdən az olmamalıdır.

a) mülahizəsinə əsasən (7.78) məqsəd funksiyası istehsal ehtiyatlarının ümumi dəyərini ifadə edir. Ona görə də bu funksiya üçün minimum qiymət axtarılır.

b) mülahizəsinə əsasən (7.79) məhdudiyyət şərtlərindən hər biri göstərir ki, hər hansı növ hazır məhsul vahidinin istehsalı üçün sərf edilmiş bütün növ ehtiyatların ümumi dəyəri (bərabərsizliyin sol tərəfi) məhsul vahidinin satışından müəssisənin əldə etdiyi mənfəətdən (bərabərsizliyin sağ tərəfi) az ola bilməz.

İqtisadi mənasma görə ehtiyatların dəyərləri mənfi kəmiyyətlərlə ifadə edilə bilməzlər və buna görə də qoşma məsələnin u_1,u_2,u_3 məchullarının (7.80) mənfi olmaması şərtləri ödənilməlidir.

4. Beləliklə, (7.75) - (7.77) və (7.78) – (7.80) simmetrik qarşılıqlı qoşma XP məsələləri cütünü almış oluruq. Onların həlli məqsədi ilə iki üsuldan istifadə etmək olar.

Birinci üsul. Qoşma məsələlər vahid simpleks-cədvəli üzrə eyni zamanda, yəni paralel surətdə həll edilirlər.

y_1, y_2, y_3 mənfi olmayan asılı məchullarını daxil etməklə (7.75) – (7.77) - dən alırıq:

Düz məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 5x_1 + 2x_2 \to \max; \qquad (7.81)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} y_1 = -11x_1 - 3x_2 + 671 \geq 0, \\ y_1 = -8x_1 - 4x_2 + 588 \geq 0, \\ y_1 = -5x_1 - 3x_2 + 423 \geq 0. \end{cases} \qquad (7.82)$$

Məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \qquad (7.83)$$

Oxşar qayda ilə v_1, v_2 mənfi olmayan asılı məchullarını daxil edərək (7.78) – (7.80) - dan alırıq:

Qoşma məsələ.

Məqsəd funksiyası

$$W(u) = 671u_1 + 588u_2 + 423u_3 \to \min; \qquad (7.84)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} v_1 = 11u_1 + 8u_2 + 5u_3 - 5 \geq 0, \\ v_2 = 3u_1 + 4u_2 + 3u_3 - 2 \geq 0. \end{cases} \qquad (7.85)$$

Məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \qquad (7.86)$$

Beləliklə, alinmış (7.81) – (7.83) və (7.84) – (7.86) qoşma məsələlər cütünü aşağıdakı vahid simpleks - cədvəli şəkilində göstərək:

		$V_1=$ $-x_1$	$V_2=$ $-x_2$	$W=$ 1
u_1	$y_1=$	$\boxed{11}$	3	671
u_2	$y_2=$	8	4	588
u_3	$y_3=$	5	3	423
1	$Z=$	-5	-2	0

(7.87)

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, (7.81 - (7.83) düz məsələsini həll etməklə, biz ona paralel surətdə (7.84) - (7.86) qoşma məsələsini də həll etmiş oluruq.

«max» XP məsələsinin simpleks üsulu ilə mərhələli həlli prinsipi əsasında alırıq:

		$u_1 = -y_1$	$V_2 = -x_2$	$W = 1$	
V_1	$x_1 =$	1	3	671	
u_2	$y_2 =$	-8	20	1100	:11,
u_3	$y_3 =$	-5	18	1298	
1	$Z =$	5	-7	3355	

		$u_1 = -y_1$	$V_2 = -x_2$	$W = 1$
V_1	$x_1 =$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	61
u_2	$y_2 =$	$-\frac{8}{11}$	$\boxed{\frac{20}{11}}$	100
u_3	$y_3 =$	$-\frac{5}{11}$	$\frac{18}{11}$	118
1	$Z =$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{7}{11}$	305

		$u_1 = -y_1$	$u_2 = -y_2$	$W = 1$	
V_1	$x_1 =$	$\frac{4}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{920}{11}$	
V_2	$x_2 =$	$-\frac{8}{11}$	1	100	$: \frac{20}{11}$,
u_3	$y_3 =$	$\frac{4}{11}$	$-\frac{18}{11}$	$\frac{560}{11}$	
1	$Z =$	$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{6800}{11}$	

		$u_1 = -y_1$	$u_2 = -y_2$	$W = 1$	
V_1	$x_1 =$	$\frac{4}{20}$	$-\frac{3}{20}$	46	
V_2	$x_2 =$	$-\frac{8}{20}$	$\frac{11}{20}$	55	(7.88)
u_3	$y_3 =$	$\frac{4}{20}$	$-\frac{18}{20}$	28	
1	$Z =$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	340	

Beləliklə, (7.88) nəticə cədvəlini alırıq. Onun sərbəst sütununda və Z – sətrində mənfi elementlər yoxdur. Deməli,

$$y_1 = 0\,, y_2 = 0 \text{ yaxud } x_1 = 46\,, x_2 = 55\,, \qquad (7.89)$$

düz məsələnin optimal həllidir. Bununla bərabər $Z_{\max} = 340$.

Cavab (düz məsələ):

$x_1 = 46$ ***(ton) – A məhsulunun optimal istehsal planı;***

$x_2 = 55$ ***(ton) - B məhsulunun optimal istehsal planı;***

$Z_{max} = 340$ ***(min manat) – hazır məhsul satışından müəssisənin əldə etdiyi maksimum ümumi mənfəətdir.***

Qeyd edək ki, (7.88) cədvəlindən həmçinin qoşma məsələnin də optimal həllini

$$v_1 = 0, v_2 = 0, u_3 = 0$$

$$\text{yaxud } u_1 = \frac{4}{20} = 0{,}20;\ u_2 = \frac{7}{20} = 0{,}35;\ u_3 = 0 \qquad (7.90)$$

şəkilində alırıq. Burada eyni zamanda $W_{min} = 340$ olur.

İkinci üsul. Burada qoşma məsələnin optimal həlli qoşmalığın ikinci teoremi əsasında alınır. Bu məqsədlə aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:

1) Düz məsələ adi simpleks üsulu ilə həll edilir.

Onun optimal həlli tapılır:

$$x_1 = 46,\ x_2 = 55 \text{ və } Z_{max} = 340.$$

2) Qoşmalığın ikinci teoreminin şərtləri nəzərə alınmaqla xətti tənliklər sistemi tərtib edilir və o həll edilir.

Doğrudan da, $x_1 = 46 > 0$ və $x_2 = 55 > 0$ olduğundan, qoşma məsələdə həmin məchullara uyğun məhdudiyyət şərtləri tənliklərdən ibarət olmalıdır:

$$\begin{cases} 11u_1 + 8u_2 = 5, \\ 3u_1 + 4u_2 = 2. \end{cases} \qquad (7.91)$$

(7.91) sistemini həll edib qoşma məsələnin optimal həllini

$$u_1 = 0{,}20;\ u_2 = 0{,}35, \qquad (7.92)$$

şəkilində tapırıq ki, bu da (7.90) ilə üst-üstə düşür.

(7.92) qiymətlərini (7.84) ifadəsində yerinə yazmaqla məqsəd funksiyası üçün alırıq

$$W_{min} = 671 \cdot 0{,}20 + 588 \cdot 0{,}35 + 423 \cdot 0 = 134{,}2 + 205{,}8 = 340,$$

$$\text{yəni } W_{min} = 340. \qquad (7.93)$$

Cavab (qoşma məsələ):

$u_1 = \frac{4}{20} = 0{,}20$ ***(min man.) - I növ ehtiyat vahidinin optimal dəyəri (qiyməti);***

$u_2 = \frac{7}{20} = 0{,}35$ ***(min man.) - II növ ehtiyat vahidinin optimal dəyəri (qiyməti);***

$u_3 = 0$ ***– III növ ehtiyat vahidinin optimal dəyəri (qiyməti).***

$W_{min} = 340$ ***(min man.) – müəssisədə bütün hazır məhsulun istehsalı üçün sərf edilmiş ehtiyatların minimum ümumi dəyəridir.***

7.5. Qoşmalığın birinci (əsas) və ikinci teoremlərinin iqtisadi mənası

(7.75) – (7.77) və (7.78) – (7.80) qarşılıqlı qoşma məsələlər cütünə baxaq.

Qoşmalığın birinci (əsas) teoreminin iqtisadi mənası aşağıdakından ibarətdir.

$x^* = (x_1^*, x_2^*)$ məhsul istehsalı planı və ehtiyatların $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ dəyərləri planı (qiymətlər məcmusu) yalnız və yalnız o vaxt optimal ola bilərlər ki, əvvəlcədən məlum olan P_1, P_2 «xarici» mənfəət normaları üzrə, hazır məhsul satışından müəssisənin əldə etdiyi ümumi mənfəət ehtiyatların «daxili» (qoşma məsələsinin həilindən alınmış) u_1^*, u_2^*, u_3^* dəyərləri nəzərə alınmaqla istehsal prosesində sərf olunmuş ehtiyatların ümumi dəyərinə bərabər oslun.

Qarşılıqlı qoşma məsələlərin digər bütün x və u planları üçün, qoşmalıq nəzəriyyəsinin (7.57) əsas bərabərsizliyinə uyğun olaraq, müəssisənin hazır məhsul satışından əldə etdiyi ümumi mənfəət sərf olunmuş ehtiyatların ümumi dəyərindən həmişə az yaxud ona bərabərdir, yəni $Z(x) \leq W(u)$.

Deməli, $W(u) - Z(x) \geq 0$ fərqi hazır məhsulun istehsal planı və ehtiyatlar üçün təyin edilmiş dəyərlərdən asılı olmaqla istehsal itkisini ifadə edir.

Qoşmalığın birinci teoremindən alırıq ki, yalnız optimal məhsul istehsalı planı (x^*) və ehtiyatların dəyərləri planı (u^*) üzrə

$$Z(x^*) = W(u^*) \text{ yaxud } W(u^*) - Z(x^*) = 0 \text{ olur,}$$

daha doğrusu, müəssisədə istehsal prosesi yalnız ən səmərəli təşkil olunduqda, istehsal itkiləri sıfıra bərabərdir.

Beləliklə, bizim baxdığımız məsələlər cütü üçün maksimum ümumi mənfəət Z_{max} və sərf olunmuş ehtiyatların minimum ümumi dəyəri W_{min} bir-birinə bərabər olub 340 min manat təşkil edirlər.

Hər iki məsələnin yerdə qalan bütün mümkün x və u həllərində isə

$$Z(x) \leq 340 \text{ və } W(u) \geq 340$$

bərabərsizlikləri ödənilir.

Qoşmalığın birinci teoremininin iqtisadi mənasını həmçinin belə də izah etmək olar: müəssisə üçün $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ optimal planı üzrə hazır məhsul istehsal edib və onun satışından Z_{max} - maksimum mənfəət əldə etməyin yaxud mövcud istehsal ehtiyatlarını $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ optimal dəyərləri (qiymətləri) üzrə satıb və sərf edilmiş ehtiyatların W_{min} - minimum ümumi dəyərini ödəməyin heç bir fərqi yoxdur.

Daha doğrusu, göstərilən hər iki halda müəssisə özünün rentabelli fəaliyyətini təmin edir.

Qoşmalığın ikinci teoreminin iqtisadi mənasına baxaq.

Qoşmalığın ikinci teoreminə əsasən $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ optimal məhsul istehsah planı və ehtiyatların $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ optimal dəyərləri (qiymətləri) planı üzərinə aşağıdakı tələblər qoyulur:

a) bərabərlik şərtlərindən alırıq ki,

$$\text{əgər } \sum_{i=1}^{3} a_{ij}u_i^* > p_j, \text{ onda } x_j^* = 0, (j = 1,2); \qquad (7.94)$$

$$\text{əgər } x_j^* > 0, \text{ onda } \sum_{i=1}^{3} a_{ij}u_i^* = p_j, \ (j = 1,2); \qquad (7.95)$$

b) bərabərlik şərtlərindən alırıq ki,

$$\text{əgər } \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j^* < a_i, \text{ onda } u_i^* = 0, (i = 1,2,3); \qquad (7.96)$$

$$\text{əgər } u_i^* > 0, \text{ onda } \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j^* = a_i, (i = 1,2,3); \qquad (7.97)$$

(7.94) və (7.97) şərtlərini iqtisadi nöqteyi nəzərdən müvafiq olaraq belə də izah etmək olar:

əgər sərf edilmiş ehtiyatların bütün dəyəri j növ hazır məhsul üzərinə keçmirsə, onda bu məhsul zərərlidir və onun istehsalı məqsədəuyğun deyildir, yəni məhsulun istehsal planı sıfıra bərabərdir;

əgər j növ məhsul istehsal olunursa, onda o zərərli deyildir və bu zaman sərf edilmiş ehtiyatların bütün dəyəri tamamailə hazır məhsul üzərinə keçir.

(7.96) və (7.97) şərtlərini isə iqtisadi nöqteyi nəzərdən müvafiq olaraq aşağıdakı kimi də izah etmək olar:

- əgər istehsal prosesində i növ ehtiyatların miqdarı tam istifadə olunmursa, onda onların dəyəri (qiyməti) sıfıra bərabərdir;

- əgər i növ ehtiyat vahidinin dəyəri (qiyməti) müsbət olarsa, onda həmin ehtiyatların miqdarı istehsal prosesində tam istifadə olunur.

Doğrudan da, düz məsələnin optimal həllində $x_1^*=46>0$ və $x_2^*=55>0$ ödənilir, yəni *A* və *B* məhsulları zərərli deyildirlər. Ona görə də qoşma məsələnin $u_1^*=0{,}20\,, u_2^*=0{,}35$ və $u_3^*=0$ optimal həllinə əsasən (7.95) - dən alırıq ki, aşağıdakı bərabərliklər ödənilməlidir:

$$\begin{cases} 11u_1^*+8u_2^*+5u_3^*=5, \\ 3u_1^*+4u_2^*+3u_3^*=2, \end{cases} \text{yaxud}$$

$$\begin{cases} 11\cdot 0{,}20+8\cdot 0{,}35+5\cdot 0=5, \textit{ yəni } 5=5, \\ 3\cdot 0{,}20+4\cdot 0{,}35+3\cdot 0=2, \textit{ yəni } 2=2. \end{cases}$$

Daha dəqiq desək, alırıq ki, hazır məhsul vahidinin istehsalına sərf edilmiş ehtiyatların bütün dəyəri, məhsul satışından alınan mənfəətə bərabərdir.

Qoşma məsələnin optimal həlli üzrə $u_1^*=0{,}20>0$, $u_2^*=0{,}35>0$ və $u_3^*=0$ olduğu üçün (7.96) və (7.97) münasibətlərindən alırıq

$$\begin{cases} 11x_1^*+3x_2^*=671, \\ 8x_1^*+4x_2^*=588, \\ 5x_1^*+3x_2^*<423, \end{cases} \text{yaxud}$$

$$\begin{cases} 11\cdot 46+3\cdot 55=671, \textit{ yəni } 671=671, \\ 8\cdot 46+4\cdot 55=588, \textit{ yəni } 588=588, \\ 5\cdot 46+3\cdot 55<423, \textit{ yəni } 395<423. \end{cases}$$

Deməli, istehsal prosesində optimal plan üzrə məhsul buraxılışı zamanı I və II növ ehtiyatlardan tam istifadə olunur, III növ ehtiyatların mövcud miqdarından isə 28 (kq) az sərf edilir.

7.6. Həll nəticələrinin iqtisadi - riyazi təhlili

Qarşılıqlı qoşma məsələlərin optimal həllərini tapdıqdan sonra tədqiq edilən sosial-iqtisadi sistemlərin fəaliyyətini xarakterizə edən ayrı-ayrı parametrlərin dəyişməsi ilə həll nəticələrindəki mümkün meyllər haqqında əlavə məlumtaların əldə edilməsi problemi mühüm elmi-tplaktiki əhəmiyyət kəsb edir. Tədqiqatın bu hissəsi adətən ***qarşılıqlı qoşma məsələlərin həllərinin həssaslığının iqtisadi - riyazi təhlili adlanır.***

Qoşma məsələlərin həllərinin iqtisadi-riyazi təhlili əsasən iki istiqamətdə aparılır: müxtəlif plan variantları müqayisə edilməklə alınmış müvafiq modellər üzrə variant hesablamaları yerinə yetirilir yaxud alınmış həllərdən hər biri obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin köməkliyi ilə təhlil edilir.

Bəzi hallarda variant hesablamaları iqtisadi-riyazi modelin özünün sabit quruluşunun saxlanılması ilə aparıla bilər. Məsələn, burada məchulların tərkibi, istehsal üsulları, məsələnin məhdudiyyət şərtləri və optimallıq meyarı, yəni məqsəd funksiyası sabit qalır, lakin modeldə istifadə olunan ayrı-ayrı kəmiyyətlərin ədədi qiymətləri dəyişdirilir.

Digər hallarda isə variant hesablamaları alınmış iqtisadi-riyazi modeldəki müxtəlif təşkiledici elementlərin dəyişdirilməsi ilə yerinə yetirilir. Məsələn, yeni optimallıq meyarı (məqsəd funksiyası) seçilir, ehtiyatlardan yaxud texnoloji üsullardan istifadə və məhsul buraxılışı üzrə verilmiş məsələ0yə əlavə məhdudiyyət şərtləri daxil edilir, istehsalın təşkili variantları çoxluğunun genişləndirilməsi nəzərdə tutulur və s.

İqtisadi-riyazi təhlil prosesində xüsusi ilə qoşma məsələnin optimal həllinin komponentləri daha vacib əhəmiyyət kəsb edirlər. Onlara ***düz məsələnin optimal yaxud qoşma qiymətləri deyilir.***

Akademik L.V.Kantoroviç bu komponentləri ***obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlər*** adlandırmışdır. Müvafiq ədəbiyyatda onlar həmçinin ***gizli gəlirlər, dəyişən qiymətlər və həlledici vuruqlar adlanır.***

Qeyd edək ki, obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlər tamamilə müxtəlif iqtisadi məna kəsb edə bilər və bu tədqiq edilən sosial-iqtisadi sistemin xarakterindən asılı olaraq təyin edilir.

Adətən qoşma məsələlərin həllərinin iqtisadi-riyazi təhlili obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin aşağıdakı iqtisadi-riyazi xassələrinə əsaslanır:

1 - ci xassə. Qiymətlər ehtiyatlar və məhsulun defisitlik (çatışmazlıq) ölçüsü kimi çıxış edirlər.

2 - ci xassə. Qiymətlər məhdudiyyətlərin məqsəd funksiyasına təsirini müəyyən edirlər.

3 - cü xassə. Qiymətlər müxtəlif variantların tətbiqinin səmərəliliyini təyin edən vasitədir.

4 - cü xassə. Qiymətlər məcmu xərclər və nəticələrin balanslaşdırılması vasitəsidir.

Hər iki qarşılıqlı qoşma məsələlər həll olunduqdan sonra alınmış optimal həll nəticələrinin iqtisadi-riyazi təhlil edilməsi zəruridir. Burada istehsal ehtiyatlarının miqdarlarının və ayrı-ayrı növ məhsul vahidlərinin satışından əldə edilən mənfəət normalarının dəyişdirilməsinin, yeni növ məhsul istehsalının nəzərdə tutulmasının və s. məsələlərin optimal həllərinə təsirinin tədqiqi problemi xüsusi maraq kəsb edir.

Baxdığımız istehsal ehtiyatlarından optimal istifadə məsələsi (cədvəl 7.1) timsalında (7.75) – (7.77) və (7.78) – (7.80) qoşma məsələlərinin optimal həllərinin iqtisadi-riyazi təhlilini nəzərdən keçirək. Bununla əlaqədar olaraq qarşıda qoyulmuş məqsəddən asılılı olmaqla aşağıdakı problemlərin həlli istiqamətində təhlil aparılması tələb oluna bilər:

1. Ehtiyatların obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərinin iqtisadi mənasını aydınlaşdırmalı.
2. Ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsinə nisbətən qiymətlərin dayanıqlıq intervallarını tapmalı.
3. I, II növ ehtiyatların miqdarları müvafiq olaraq 60 kq, 38kq çoxaldıqda, III növ ehtiyatlarm miqdarı isə 25 kq azaldıqda onların müəssisənin maksimum

ümumi mənfəətinin dəyişməsinə ayrılıqda və birgə təsirini təyin etməli.
4. Ehtiyatların əvəzolunma normalarını təyin etməli.
5. Əgər I, II növ ehtiyatlar müvafiq olaraq 60 kq, 38 kq çoxalırsa, III növ ehtiyatların miqdarı isə 25 kq azalırsa, onda məhsul istehsalının optimal planını tapmalı.
6. Müəssisədə iki növ yeni D və G məhsullarının da istehsalı üçün imkan vardır. D məhsul vahidinin istehsalına ehtiyatların sərfi normaları və onun satışından əldə edilən mənfəət norması müvafiq olaraq aşağıda verilmişdir:

$$a_{13} = 3кг, a_{23} = 6кг, a_{33} = 7кг \quad \text{və} \quad P_3 = 4 мин\ ман.$$

G məhsulu üçün isə uyğun kəmiyyətlər:

$$a_{14} = 5кг, a_{24} = 8кг, a_{34} = 2кг \quad \text{və} \quad P_4 = 3 мин\ ман.$$

İstehsal planına yeni məhsulun daxil edilməsinin məqsədəuyğun olmasını qiymətləndirməli.
7. Hazır məhsul satışından mənfəət normasının dəyişməsinə nisbətən məhsulun optimal istehsal planının dayanıqlıq intervallarını tapmalı.
8. Hazır məhsul satışından əldə edilən ümumi mənfəət və sərf olunmuş ehtiyatların ümumi dəyərini müqayisə etməli.

7.6.1. Ehtiyatların obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərinin iqtisadi mənası

Bu qiymətlərin dəqiq mənası onunla səciyyəvidir ki, onlar şərtidirlər, yəni «həqiqi olmayan» kəmiyyətlərdir. (7.75) – (7.77) düz məsələsində A və B məhsul vahidlərinin satışından P_1 və P_2 mənfəət normaları istehsal prosesini başlayana qədər məlumdur və ***xarici kəmiyyətlərdir***. Lakin I, II və III növ ehtiyat vahidlərinin u_1^*, u_2^*, u_3^* dəyərləri (qiymətləri) isə əvvəlcədən verilmir, (7.78) - (7.80) qoşma məsələsinin bilavasitə həlli nəticəsində təyin edilirlər. Buna görə də onlar ***daxili kəmiyyətlərdir.***

Düz məsələnin y_1, y_2, y_3 asılı məchulları üçün (7.28) münasibətlərini aşağıdakı kimi yazaq:

$$y_i = a_i - \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \geq 0, \quad (i = 1,2,3), \qquad (7.98)$$

Qoşma məsələnin v_1, v_2 asılı məchulları üçün (7.37) münasibətlərini isə

$$v_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} u_i - p_j \geq 0, \quad (j = 1,2). \qquad (7.99)$$

kimi göstərək.

Onda (7.98) və (7.99) - ə əsasən uyğun olaraq alırıq:

$$\begin{cases} y_1 = 671 - (11x_1 + 3x_2) \geq 0, \\ y_2 = 588 - (8x_1 + 4x_2) \geq 0, \\ y_3 = 423 - (5x_1 + 3x_2) \geq 0. \end{cases} \qquad (7.100)$$

$$\begin{cases} v_1 = 11u_1 + 8u_2 + 5u_3 - 5 \geq 0, \\ v_2 = 3u_1 + 4u_2 + 3u_3 - 2 \geq 0. \end{cases} \qquad (7.101)$$

(7.100) - dən göründüyü kimi düz məsələnin y_1, y_2, y_3 asılı məchulları iqtisadi nöqteyi nəzərdən I, II, III növ ehtiyatların mövcud 671 kq, 588 kq, 423 kq miqdarları ilə hazır məhsulun istehsalı üçün onların məcmu məsarifləri arasındakı fərqləri, daha doğrusu, müvafiq ehtiyatların qalıqlarını göstərirlər.

(7.101) münasibətlərinə əsasən qoşma məsələnin v_1, v_2 asılı məchulları iqtisadi olaraq hazır məhsulun istehsalı üçün sərf olunmuş ehtiyatların məcmu dəyərləri ilə *A* və *B* məhsul vahidlərinin satışından əldə edilən müvafiq 5 min manat və 2 min manat mənfəət normaları arasındakı fərqləri, yəni məcmu dəyərin mənfəəti aşmasını ifadə edirlər.

Beləliklə, baxdığımız qarşılıqlı qoşma məsələlərin optimal həllərinin komponentləri cədvəl 7.2 - də verilmişdir.

Cədvəl 7.2

Düz məsələnin optimal həllinin komponentləri				
Məhsul istehsalı planı		**İstehsal ehtiyatlarının qalıqları**		
A	B	I	II	III
$x_1^* = 46$	$x_2^* = 55$	$y_1^* = 0$	$y_2^* = 0$	$y_3^* = 28$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$v_1^* = 0$	$v_2^* = 0$	$u_1^* = 0{,}20$	$u_2^* = 0{,}35$	$u_3^* = 0$
Ehtiyatların məcmu dəyərinin məhsul vahidindən mənfəəti aşması		Ehtiyat vahidlərinin şərti dəyərləri (obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlər)		
Qoşma məsələnin optimal həllinin komponentləri				

Cədvəl 7.2 - dən göründüyü kimi I və II növ ehtiyat vahidlərinin şərti dəyərləri sıfırdan fərqlidir, yəni $u_1^* = 0{,}20$ və $u_2^* = 0{,}35$. Ona görə də məhsulun optimal istehsal planı üzrə həmin ehtiyatlardan tam istifadə olunur və onların qalıqları sıfıra bərabərdir, yəni $y_1^* = 0$ və $y_2^* = 0$. Bununla bərabər III növ ehtiyatlardan istehsal prosesində tam istifadə olunmur və onların qalığı $y_3^* = 28$ (kq) təşkil edir. Ona görə də III növ ehtiyat vahidinin şərti dəyəri sıfıra bərabərdir, yəni $u_3^* = 0$.

Beləliklə, ehtiyat vahidlərinin şərti dəyərləri (obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətləri) ehtiyatların defisitlik dərəcəsini təyin edirlər: hazır məhsulun optimal istehsal planı üzrə defisit, yəni tam istifadə olunan ehtiyatların şərti dəyərləri sıfırdan fərqli, defisit olmayan ehtiyatların dəyərləri isə sıfıra bərabər qiymətlər alırlar.

Qeyd edək ki, III növ ehtiyatların defisit olmaması heç də onların miqdarının qeyri-məhdud olması demək deyildir, belə ki, məsələnin şərtlərinə görə onlar məhdud olub $a_3 = 423$

kq təşkil edirlər. Sadəcə olaraq bu ehtiyatlar istehsal prosesində tam istifadə olunmurlar. Defisit olmayan ehtiyatların məcmu məsarifi onların mövcud miqdarından az olduğu üçün müəssisədə hazır məhsul üzrə istehsal planı həmin ehtiyatlarla məhdudlaşdırılmır. Əksinə, defisit olmayan ehtiyatlar müəssisənin ümumi mənfəətini, yəni *Z(x)* məqsəd funksiyasının qiymətini daha da artırmaq üçün şərait yaradırlar.

Müəssisənin ümumi mənfəətinin çoxalmasını I və II növ defisit ehtiyatlar məhdudlaşdırırlar, çünki onların $a_1 = 671$ *kq* və $a_2 = 588$ *kq* mövcud miqdarları istehsal prosesində tam istifadə edilmiş olur.

Burada həmçinin qeyd etmək lazımdır ki, u_i^* şərti dəyəri böyük olduqca müvafiq i növ ehtiyatların defisitliyi daha kəskin olur. Məsələn, $u_1^* = 0{,}20 < 0{,}35 = u_2^*$ olduğu üçün baxdığımız məsələdə I növ ehtiyatlara nisbətən II növ ehtiyatların defisitlik dərəcəsi daha yüksək olur. Bununla əlaqədar olaraq müəssisənin ümumi mənfəətini çoxaltmaq məqsədi ilə I növ ehtiyatlarla müqayisədə II növ ehtiyatların miqdarının artırılması daha əlverişlidir.

Cədvəl 7.2 - dən göründüyü kimi düz məsələnin optimal həlli üzrə *A* və *B* məhsullarının $x_1^* = 46$ ton və $x_2^* = 55$ ton həcmində istehsal planları müəssisənin maksimum ümumi mənfəət əldə etməyi nöqteyi nəzərdən məqsədəuyğundur. Bu zaman istifadə olunmuş ehtiyatların məcmu dəyərinin məhsul vahidinin satışından əldə edilmiş mənfəəti aşması sıfıra bərabər olur ($v_1^* = 0$ və $v_2^* = 0$).

Qeyd 7.4. Fərz edək ki, sərf edilmiş ehtiyatların məcmu dəyəri j növ məhsul vahidindən mənfəəti aşır, yəni $v_j^* > 0$. Onda qoşmalığın ikinci teoremi əsasında alırıq ki, düz məsələdə müvafiq məchulun optimal qiyməti $x_j^* = 0$. Bu halda optimal plan üzrə j növ hazır məhsulun istehsalı məqsədəuyğun deyildir.

Beləliklə, optimal istehsal planına yalnız rentabelli, yəni zərərsiz məhsullar daxil edilir. Burada rentabellik meyarı özünəməxsus xüsusiyyətə malik olub göstərir ki, məhsul vahidindən mənfəət istifadə olunmuş ehtiyatların məcmu dəyərini aşmayıb, dəqiq ona bərabər olur.

İqtsiadi-riyazi təhlil prosesində həmçinin ***məhsulun defisitliyinin*** öyrənilməsi də mühüm əhəmiyyət kəsb edir. İstehsalın bir sıra optimal planlaşdırılması məsələlərində ayrı-ayrı növ məhsulların buraxılışı üzrə plan tapşırıqlarının yerinə yetirilməsi tələb olunur. Ona görə də məsələnin məhdudiyyət şərtlərinə $x_j \geq B_j$ şəkilində əlavə şərtlər daxil edilir, burada B_j - j növ məhsula olan tələbatdır. Onda qoşma məsələnin həlli nəticəsində hazır məhsula müvafiq qiymətlər də tapılır. Əgər düz məsələnin optimal planında məhsula olan tələbatdan artıq istehsal olunursa, onda qoşma məsələdə müvafiq məhsul sıfıra bərabər qiymət alır. Aydındır ki, yalnız ***əlverişli məhsul*** üzrə planın artıqlaması ilə yerinə yetirilməsi məqsədəuyğundur. Bu da maksimum mənfəətin alınmasına imkan verir. Əlverişli məhsul buraxılışının həcmi yalnız plan tapşırığı (B_j) ilə təyin edilmir, belə ki, optimal istehsal planına görə o artıqlaması ilə yerinə yetirilir. Həmin məhsulun buraxılış həcmi defisit ehtiyatlarla müəyyən olunur və buna görə də nə qədər ki, ehtiyatlar kifayət edir, məhsuldan daha çox istehsal etmək sərfəlidir.

Həmçinin qeyd edək ki, əlverişli məhsul buraxılışı nəinki defisit ehtiyatların miqdarları ilə məhdudlaşdırılır, eyni zamanda nəzərə almaq lazımdır ki, onların müəyyən hissəsi əlverişli olmayan məhsulların buraxılışı üzrə verilmiş məcburi plan tapşırıqlarının yerinə yetirilməsi üçün ayrılmalıdır. Plan tapşırığı artıqlaması ilə ödənilməyən məhsul ***əlverişli olmayan məhsul*** adlanır və qoşma məsələnin optimal həllində o mənfi qiymət alır.

Qeyd etmək lazımdır ki, məhsul buraxılışı üzrə məhdudiyyətlərin məsələnin məqsəd funksiyasının qiymətinə təsiri, ehtiyatlar üzrə məhdudiyyətlərin müvafiq təsirinə əksdir. Belə ki, əgər məhsul əlverişli deyildirsə, onun buraxılışı üzrə plan tapşırıqlarının artırılması əlverişli məhsul buraxılışını azaltmağa və ümumiyyətlə, planın pisləşməsinə səbəb olur. Əksinə, əlverişli olmayan məhsul üzrə plan tapşırığının aşağı salınması, nəticədə qənaət edilmiş ehtiyatların əlverişli məhsul üzrə verilmiş plandan daha çox əlavə istehsal etmək üçün yönəldilir ki, bu da müəssisənin ümumi mənfəətinin daha çox artmasına şərait yaradır.

7.6.2. Ehtiyatların qiymətlərinin dayanıqlıq intervallarının təyini

Qoşmalığın üçüncü teoreminin (7.72) analitik ifadəsindən istifadə edərək, biz müəssisənin maksimum mənfəətinin ən çox dəyişməsini təmin etməyə mane olan səbəblərin aradan qaldırılması istiqamətlərini aşkar edə bilərik. Bu dəyişmə u_i^* kəmiyyətləri ilə təyin edilir və yalnız o vaxt müəyyən olunur ki, a_i ehtiyatlarının miqdarının dəyişməsinə baxmayaraq qoşma məsələnin u_i^* optimal qiymətləri dəyişməz olaraq qalsınlar.

Bununla əlaqədar olaraq ehtiyatların miqdarlarının elə dəyişmə intervallarının təyin edilməsi məsələləri xüsusi maraq kəsb edir ki, burada qoşma məsələnin optimal həlli sabit qalsın.

Tutaq ki, I, II və III növ ehtiyatların verilmiş 671 kq, 588 kq və 423 kq ilkin miqdarları müvafiq olaraq $\Delta a_1, \Delta a_2$ $və$ Δa_3 kəmiyyətləri qədər dəyişmişlər. Onda (7.78) xətti funksiyası əsasında ehtiyatların ümumi dəyəri

$$W(u^*) = (671+\Delta a_1)u_1^* + (588+\Delta a_2)u_2^* + (423+\Delta a_3)u_3^* \quad (7.102)$$

təşkil edəcəkdir.

(7.102) - də u_1^* və u_2^* asılı məchullarını (7.88) nəticə cədvəlindən optimal həllin asılı olmayan v_1^*, v_2^* $və$ u_3^* məchulları vasitəsi ilə əvəz etsək, alarıq:

$$W(u^*)=(671+\Delta a_1)\cdot(\frac{4}{20}v_1^*-\frac{8}{20}v_2^*+\frac{4}{20}u_3^*+\frac{4}{20})+$$
$$+(588+\Delta a_2)\cdot(-\frac{3}{20}v_1^*+\frac{11}{20}v_2^*-\frac{18}{20}u_3^*+\frac{7}{20})+$$
$$+(423+\Delta a_3)\cdot u_3^*. \qquad (7.103)$$

Zəruri çevirmələri aparmaqla (7.103) - dən yaza bilərik:

$$W(u^*)=\frac{1}{20}\cdot(671\cdot 4-588\cdot 3+4\cdot\Delta a_1-3\cdot\Delta a_2)v_1^*+$$
$$+\frac{1}{20}\cdot(-671\cdot 8+588\cdot 11-8\cdot\Delta a_1+11\cdot\Delta a_2)v_2^*+$$
$$+\frac{1}{20}\cdot(671\cdot 4-588\cdot 18+4\cdot\Delta a_1-18\cdot\Delta a_2+423+\Delta a_3)u_3^*+$$
$$+\frac{1}{20}\cdot(671\cdot 4+588\cdot 7)=\frac{1}{20}\cdot(920+4\cdot\Delta a_1-3\cdot\Delta a_2)v_1^*+$$
$$+\frac{1}{20}\cdot(1100-8\cdot\Delta a_1+11\cdot\Delta a_2)v_2^*+$$
$$+\frac{1}{20}\cdot(560+4\cdot\Delta a_1-18\cdot\Delta a_2+20\Delta a_3)u_3^*+340. \qquad (7.104)$$

Əgər $\Delta a_1=0, \Delta a_2=0, \Delta a_3=0$ olarsa, yəni I, II və III növ ehtiyatların miqdarları dəyişməz qalarsa, onda (7.104) - dən

$$W(u^*)=46v_1^*+55v_2^*+28u_3^*+340$$

ifadəsi alınır ki, bu da qoşma məsələnin W məqsəd funksiyasının (7.88) cədvəlindəki v_1^*, v_2^*, u_3^* asılı olmayan məchulları vasitəsi ilə xətti ifadəsinin eynidir.

Ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsi zamanı onların obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərinin sabit qalması, daha doğrusu qoşma məsələnin $u^*=(0{,}20; 0{,}35; 0)$ optimal həllinin saxlanılması üçün (7.104) ifadəsində asılı olmayan məchulların əmsallarının mənfi olmaması kifayətdir.

Onda (7.104) - dən aşağıdakı xətti bərabərsizliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} 920 + 4\Delta a_1 - 3\Delta a_2 \geq 0, \\ 1100 - 8\Delta a_1 + 11\Delta a_2 \geq 0, \\ 560 + 4\Delta a_1 - 18\Delta a_2 + 20\Delta a_3 \geq 0. \end{cases} \qquad (7.105)$$

Fərz edək ki, yalnız I növ ehtiyatların miqdarı dəyişir, lakin II və III növ ehtiyatların miqdarları sabit qalırlar, yəni $\Delta a_2 = 0$ və $\Delta a_3 = 0$. Onda (7.105) sistemindən alırıq:

$$\begin{cases} 920 + 4\Delta a_1 \geq 0, \\ 1100 - 8\Delta a_1 \geq 0, \\ 560 + 4\Delta a_1 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \geq -230, \\ \Delta a_1 \leq 137{,}5, \\ \Delta a_1 \geq -140. \end{cases}$$

Buradan I növ ehtiyatların miqdarının aşağı sərhədi

$$\Delta a_1^{(-)} = \max\{-230; -140\} = -140,$$

yuxarı sərhədi isə $\Delta a_1^{(+)} = 137{,}5$ təyin edilir. Deməli,

$$-140 \leq \Delta a_1 \leq 137{,}5\,.$$

Beləliklə, I növ ehtiyatların miqdarının dəyişməsinə nisbətən obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin dayanıqlıq intervalı aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$671 + \Delta a_1^{(-)} \leq a_1 + \Delta a_1 \leq 671 + \Delta a_1^{(+)},$$
$$671 - 140 \leq a_1 + \Delta a_1 \leq 671 + 137{,}5 \quad \text{yaxud}$$
$$531 \leq a_1 + \Delta a_1 \leq 808{,}5\,.$$

Bu o deməkdir ki, əgər I növ ehtiyatların miqdarı 531 kiloqramdan 808,5 kiloqramadək dəyişirsə, onda qoşma məsələnin optimal həllində qiymətlər sabit qalırlar. Ona görə də $[531; 808,5]$ I növ ehtiyatların miqdarına nisbətən obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin dayanıqlıq intervalı olur.

Oxşar qayda ilə II növ ehtiyatlar üçün alırıq:

$$\Delta a_2^{(-)} = -100, \Delta a_2^{(+)} = 31,1,$$

$$-100 \le \Delta a_2 \le 31,1,$$

$$588 - 100 \le a_2 + \Delta a_2 \le 588 + 31,1 \text{ yaxud}$$

$$488 \le a_2 + \Delta a_2 \le 619,1.$$

$[488; 619,1]$ - II növ ehtiyatların miqdarına nisbətən qiymətlərin dayanıqlıq intervalıdır.

I və II növ defisit ehtiyatlardan fərqli olaraq III növ defisit olmayan ehtiyatlar üçün dayanıqlıq intervalının yuxarı sərhədi ilkin məlumatla ($a_3 = 423кг$) təyin edilir, yəni alırıq:

$$\Delta a_3^{(-)} = -28, \quad \Delta a_3^{(+)} = 0,$$

$$-28 \le \Delta a_3 \le 0,$$

$$423 - 28 \le a_3 + \Delta a_3 < 423 \text{ yaxud}$$

$$395 \le a_3 + \Delta a_3 \le 423.$$

$[395, 423]$ - III növ ehtiyatların miqdarına nisbətən qiymətlərin dayanıqlıq intervalıdır.

Nəticədə alırıq ki, I, II və III növ ehtiyatların miqdarları uyğun olaraq $[531; 808,5], [488; 619,1]$ və $[395, 423]$ intervalları sərhəddində dəyişdikdə, qoşma məsələnin $u_1^* = 0,20$, $u_2^* = 0,35$ və $u_3^* = 0$ optimal qiymətləri sabit qalırlar.

7.6.3. Ehtiyatların miqdarlarına nisbətən maksimum mənfəətin dəyişməsinin təyini

Yuxarıda deyilənlər əsasında ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsinin hazır məhsul satışından müəssisənin əldə etdiyi maksimum mənfəətə təsiri məsələlərini nəzərdən keçirək.

Ayrılıqda təsir. Aydındır ki, I və III növ ehtiyatlardan hər birinin uyğun olaraq $\Delta a_1 = 60\,\text{kq}$ və $\Delta a_3 = (-25)\,\text{kq}$ dəyişməsi obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin dayanıqlıq intervalları sərhədlərinə daxildir. Buna görə də optimal qiymətlər əvvəl olduğu kimi qalırlar və i növ ehtiyatların miqdarının maksimum mənfəətə olan $\Delta Z_{i\ \max}(x)$ ayrılıqda təsiri (7.72) ifadəsinə uyğun olmaqla

$$\Delta Z_{i\ \max}(x) = \Delta a_i \cdot u_i^*, \quad i = 1,3$$

kimi hesablanır.

Beləliklə, alırıq

$$\Delta Z_{1\ \max}(x) = \Delta a_1 \cdot u_1^* = 60 \cdot 0{,}20 = 12,$$

$$\Delta Z_{3\ \max}(x) = \Delta a_3 \cdot u_3^* = (-25) \cdot 0 = 0.$$

Daha doğrusu, I növ ehtiyatların miqdarının 60 kq artması müəssisənin maksimum mənfəətinin də 12 min manat çoxalmasını təmin edir. Lakin, III növ ehtiyatların miqdarının 25 kq azalmasına baxmayaraq, bu maksimum mənfəətin dəyişməsinə səbəb olmur, çünki ehtiyatların müvafiq qiyməti $u_3^* = 0$.

I və III növ ehtiyatlardan fərqli olaraq, II növ ehtiyatların miqdarının 38 kq artması nəticəsində alınmış kəmiyyət (626 kq) isə $[488;619{,}1]$ dayanıqlıq intervalına daxil olmur. Bu isə, öz növbəsində, optimal qiymətlərin dəyişəmsini tələb edir. Ehtiyatlar üçün yeni alınmış optimal qiymətlər isə son nəticədə maksimum mənfəətin $\Delta Z_{2\ \max}(x)$ dəyişməsini tapmağa imkan vermir.

Birgə təsir. Məsələnin şərtlərinə görə ehtiyatların miqdarının dəyişməsi $\Delta a_1 = 60$ kq, $\Delta a_2 = 38$ kq, $\Delta a_3 = (-25)$ kq təşkil edir. Əgər ehtiyatların miqdarlarının bütün bu dəyişmələri optimal qiymətlərin müvafiq dayanıqlıq intervallarına daxil olsa idi, onda bütün ehtiyatlar üzrə dəyişmələrin müəssisənin maksimum mənfəətinə birgə təsirini hesablamaq heç bir çətinliyə səbəb olmazdı. Lakin, burada II növ ehtiyatlar müstəsnalıq təşkil edir. Bununla əlaqədar olaraq obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin dayanıqlığının tədqiqi çətinləşir, çünki verilmiş halda (7.105) xətti bərabərsizliklər sisteminin həllər çoxüzlüsünün tapılması tələb olunur.

Bununla belə ehtiyatların miqdarları üzrə nəzərdə tutulmuş dəyişmələrin (9.8) sistemini ödəyib-ödəmədiyini hər vaxt yoxlamaq mümkündür. Doğrudan da alırıq:

$$\begin{cases} 920 + 4\cdot 60 - 3\cdot 38 = 1046 > 0, \\ 1100 - 8\cdot 60 + 11\cdot 38 = 1038 > 0, \\ 560 + 4\cdot 60 - 18\cdot 38 + 20\cdot(-25) = 616 > 0. \end{cases}$$

Beləliklə, (7.105) sisteminə daxil olan bütün bərabərsizliklər ödənir, deməli ehtiyatların $u^* = (0{,}20; 0{,}35; 0)$ optimal qiymətləri əvvəl olduğu kimi qalırlar.

Bütün ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsi nəzərə alınmaqla, onların məhsul satışından əldə edilən maksimum mənfəətin çoxalmasına birgə təsiri aşağıdakı münasibətlə təyin edilir:

$$\Delta Z_{\max}(x) = \Delta a_1 \cdot u_1^* + \Delta a_2 \cdot u_2^* + \Delta a_3 \cdot u_3^* =$$
$$= 60\cdot 0{,}20 + 38\cdot 0{,}35 + (-25)\cdot 0 = 12 + 13{,}3 = 25{,}3 \text{ min } man.$$

7.6.4. Ehtiyatların əvəzolunma normalarının təyini

Qoşma məsələlərin həllərinin iqtisadi-riyazi təhlili prosesində, hazır məhsul satışından maksimum mənfəət sabit qalmaqla, həmçinin istehsal ehtiyatlarının əvəzolunma normalarının təyin edilməsi də mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

I və II növ ehtiyatlar üzrə obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin nisbətini tapaq, yəni

$$u_1^* : u_2^* = 0{,}20 : 0{,}35 = 20 : 35.$$

İqtsiadi nöqteyi-nəzərdən bu onu göstərir ki, maksimum mənfəət almaq üçün I növ ehtiyatların hər 35 vahidinə II növ ehtiyatların 20 vahidi uyğun olmalıdır. Verilmiş nisbət həmçinin I növ ehtiyatlarla müqayisədə II növ ehtiyatların daha yüksək defisitlik dərəcəsinə malik olduğunu göstərir, yəni $0{,}35 > 0{,}20$.

Qeyd edək ki, ehtiyatların əvəzolunma normalarının tədqiqi yalnız nəzərdə tutulmuş $\Delta a_1, \Delta a_2$ *və* Δa_3 dəyişmələri (7.105) sistemini ödədikdə aparılmalıdır. Daha doğrusu, nəinki I və II növ ehtiyatların, eyni zamanda III növ ehtiyatların da mövcud miqdarları optimal qiymətlərin dayanıqlıq intervalları sərhədlərinə daxil olmalıdırlar.

7.6.5. Ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsi və sabit qiymətlər nəzərə alınmaqla məhsul buraxılışının optimal planının təyini

Aydındır ki, verilmiş halda məqsəd, ehtiyatların miqdarlarının dəyişməsi nəzərə alınmaqla və qoşma qiymətlərdən istifadə etməklə (əgər bu mümkündürsə), (7.75) - (7.77) düz məsələsini həll etməkdən ibarətdir. Ehtiyatlar üzrə nəzərdə tutulmuş dəyişmələr (7.105) bərabərsizliklər sistemini ödədiyi üçün, (7.78) - (7.80) qoşma məsələsinin optimal həlli eyni olaraq qalacaqdır, yəni $u^* = (0{,}20; 0{,}35; 0)$. Qoşmalığın ikinci teoreminə əsasən və cədvəl 7.2 - yə müvafiq olaraq, qoşma məsələnin optimal həllinin $u_1^* = 0{,}20$

və $u_2^* = 0{,}35$ müsbət komponentlərinə düz məsələdə sıfıra bərabər olan asılı məchullar uyğundur, yəni

$$\bar{y}_1 = 0 \text{ və } \bar{y}_2 = 0.$$

Düz məsələnin optimal həllinin yerdə qalan $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_3$ komponentləri isə onun kanonik şəkildə yazılışında məhdudiyyət şərtləri sisteminin bilavasitə həlli nəticəsində tapılır. Bu zaman $\bar{y}_1 = 0$ və $\bar{y}_2 = 0$ qiymətləri yerinə yazılır, tənliklərin sağ tərəflərində isə ehtiyatların yeni miqdarları göstərilir, yəni

$$\bar{a}_1 = a_1 + \Delta a_1 = 671 + 60 = 731\,(\text{kq}),$$

$$\bar{a}_2 = a_2 + \Delta a_2 = 588 + 38 = 626\,(\text{kq}),$$

$$\bar{a}_3 = a_3 + \Delta a_3 = 423 + (-25) = 398\,(\text{kq}).$$

Beləliklə, nəticədə aşağıdakı xətti tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} 11\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 = 731 \\ 8\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 = 626 \\ 5\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + \bar{y}_3 = 398. \end{cases}$$

Onu həll edib $\bar{x}_1 = 52{,}3$, $\bar{x}_2 = 51{,}9$ və $\bar{y}_3 = 32{,}7$ tapırıq. Deməli, $\bar{x} = (\bar{x}_1 = 52{,}3; \bar{x}_2 = 51{,}9)$ düz məsələdə məhsul buraxılışının yeni optimal planı olur. Bu plan üzrə hazır məhsul satışından müəssisənin əldə etdiyi maksimum mənfəət isə $Z_{\max}(x) = Z(\bar{x}) = 5 \cdot 52{,}3 + 2 \cdot 51{,}9 = 261{,}5 + 103{,}8 = 365{,}3$ (min man.) təşkil edəcəkdir.

Bununla da belə nəticəyə gəlirik ki, ehtiyatların miqdarlarının $\Delta a_1 = 60$ kq, $\Delta a_2 = 38$ kq, $\Delta a_3 = (-25)$ kq dəyişməsi müəssisədə məhsul buraxılışı üzrə yeni $\bar{x} = (\bar{x}_1 = 52{,}3; \bar{x}_2 = 51{,}9)$ optimal planını təyin etməyə imkan verir.

Qeyd edək ki, əgər məhdudiyyət şərtlərinin sağ tərəflərində, müvafiq dəyişmələr nəzərə alınmaqla, ehtiyatların yeni miqdarlarını yazıb (7.75) - (7.77) düz məsələsini simpleks üsulu ilə həll etmiş olsaydıq eyni cavab almış olardıq.

Göründüyü kimi, məhsul buraxılışı planının quruluşunda heç bir dəyişiklik baş vermir, lakin yeni plan üzrə məchulların qiymətləri dəyişməyə məruz qalırlar: əvvəlki optimal plan ilə müqayisədə *A* məhsulundan 52,3 - 46 = 6,3 ton çox, *B* məhsulundan isə 55 - 51,9 = 3,1 ton az istehsal etmək sərfəlidir. Nəticədə yeni $\bar{x}$ istehsal planı əvvəlki x^* optimal planına uyğun maksimum mənfəətin

$$\Delta Z_{\max}(x) = \Delta Z(\bar{x}) = Z(\bar{x}) - Z(x^*) = 365{,}3 - 340 = 25{,}3 \quad \text{min}$$

man.

çoxalmasına imkan verir.

Burada

$$\bar{y}_3 = 398 - 5 \cdot 52{,}3 - 2 \cdot 51{,}9 = 32{,}7 \ \text{(kq)}$$

istehsal prosesində istifadə olunmamış III növ ehtiyatların miqdarını təşkil edir.

7.6.6. Plana yeni məhsul buraxılışının daxil edilməsi məqsədəuyğunluğunun qiymətləndirilməsi

Verilmiş məsələnin şərtlərinə görə, ehtiyatların mövcud miqdarlarından istifadə etməklə, buraxılan hazır məhsul nomen-klaturasını (çeşidini) genişləndirmək üçün müəssisəyə *D* və *G* kimi iki növ yeni məhsulun istehsal olunması təklif edilir. Ehtiyatların sərfi və hazır məhsul vahidinin satışından mənfəət normaları cədvəl 7.3 - də verilmişdir.

Cədvəl 7.3

Ehtiyatların növləri	Obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlər	Məhsul vahidinə ehtiyatların sərfi normaları, (kq)	
		D	G
I	0,20	3	5
II	0,35	6	8
III	0	7	2
Məhsul vahidindən mənfəət, (min man.)	-	4	3

İstehsal planına yeni növ məhsul buraxılışının daxil edilməsi məqsədəuyğunluğunu ıqtsiadi, yəni hazır məhsul satışından maksimum mənfəət əldə etmək nöqteyi-nəzərdən qiymətləndirək. Bunun üçün aşağıdakı iki üsuldan istifadə etmək olar:

Birinci üsul. Cədvəl 7.1 - in ilkin məlumatları ilə yanaşı (7.75) - (7.77) düz məsələsinin məhdudiyyət şərtlərində yeni məhsul üçün cədvəl 7.3 - də verilmiş əlavə məlumatlar da nəzərə alınır və müvafiq «max» XP məsələsi yenidən simpleks üsulu ilə həll edilir.

Əgər nəticədə hər hansı yeni məhsul optimal istehsal planına daxil edilərsə, o rentabelli, əks halda isə rentabelli olmayan məhsul olur.

Lakin bu üsul əlavə əmək, zaman və dəyər məsrəflərini tələb edir. Belə ki, ehtiyatların optimal qiymətləri məlum olduğundan bilavasitə birinci üsuldan istifadə etməyə heç zəruriyyət də yoxdur.

İkinci üsul. Yeni məhsulun istehsal planına daxil edilməsi məqsədəuyğunluğunun qiymətləndirilməsi obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin 3-cü xassəsi əsasında da müəyyən edilə bilər. Doğrudan da, müəssisənin maksimum mənfəət əldə etməsi üçün məsələnin optimal istehsal planına elə məhsul daxil edilməlidir ki, onun satışından alınmış P_j

mənfəəti defisit ehtiyatların istifadəsi ilə əlaqədar alınmamış məbləği aradan qaldırmalıdır, yəni $\sum_{i=1}^{3} a_{ij}u_i^*$ kəmiyyətindən az olmamalıdır.

Beləliklə, bu və ya digər növ yeni məhsul buraxılışının optimal plana daxil edilməsi məqsədəuyğunluğu

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}u_i^* - p_j, \quad j = 3,4\,,$$

fərqi ilə qiymətləndirilir, yəni məhsul vahidinin istehsalına məcmu sərf edilmiş ehtiyatların dəyəri və onun satışından mənfəət norması müqayisə edilir.

Əgər $\Delta_j \le 0$ olarsa, onda j növ məhsul buraxılışının optimal plana daxil edilməsi məqsədəuyğundur, $\Delta_j > 0$ olduqda isə – məqsədəuyğun deyildir.

Beləliklə, D məhsulu üçün alırıq

$$\Delta_D = a_{13}\cdot u_1^* + a_{23}\cdot u_2^* + a_{33}\cdot u_3^* - P_3 =$$
$$= 3\cdot 0{,}20 + 6\cdot 0{,}35 + 7\cdot 0 - 4 = -1{,}3 < 0,$$

yəni o rentabelli məhsuldur və onun optimal plana daxil edilməsi məqsədəuyğundur.

Bununla bərabər G məhsulu üçün alırıq

$$\Delta_G = a_{14}\cdot u_1^* + a_{24}\cdot u_2^* + a_{33}\cdot u_3^* - P_4 =$$
$$= 5\cdot 0{,}20 + 8\cdot 0{,}35 + 2\cdot 0 - 3 = 0{,}8 > 0,$$

yəni o rentabelli olmayan məhsuldur və buna görə də onun optimal plana daxil edilməsi məqsədəuyğun deyildir.

Yalnız bundan sonra, yeni, rentabelli məhsul nomenklaturasına nisbətən dəyişdirilmiş şərtlər nəzərə alınmaqla (7.75) - (7.77) düz məsələsinin praktiki olaraq reallaşdırılması zəruriliyi haqqında qərar qəbul etmək olar.

7.6.7. Məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişməsinə nisbətən optimal həllin dayanıqlıq intervallarının təyini

XP məsələsinin həndəsi izahı əsasında belə nəticəyə gəlirik ki, $Z(x)$ məqsəd funksiyasının əmsallarının dəyişdirilmiş müəyyən qiymətlərində məsələnin optimal həlli (ekstremum nöqtə) sabit qalır. Bu zaman aydındır ki, $Z(x)$ xətti funksiyasının ekstremum qiyməti əmsalların qiymətlərinə müvafiq olaraq dəyişəcəkdir.

Cədvəl 7.1 - də verilmiş iqtisadi məsələnin timsalında hər bir növ hazır məhsul vahidinin satışından mənfəət normasının dəyişməsinə nisbətən məhsul buraxılışı üzrə optimal planın dayanıqlığının təhlili və uyğun dayanıqlıq intervalının təyin edilməsi məsələləri vacib praktiki əhəmiyyət kəsb edirlər. Bu məqsədlə (7.88) nəticə simpleks-cədvəlinin məlumatlarının təhlili əsasında bizi maraqlandıran suallara cavab verməyə çalışaq.

Məlum olduğu kimi, istənilən XP məsələsinin simpleks üsulu ilə həlli prosesində simpleks-cədvəlindəki Z – sətri heç vaxt əsas sətir kimi seçilə bilməz. Ona görə də ilkin məsələnin məqsəd funksiyasının əmsallarınm istənilən dəyişmələri simpleks-cədvəlində yalnız Z – sətir əmsallarına və məqsəd funksiyasının müvafiq qiymətinə təsir edirlər. Bu o deməkdir ki, aparılmış dəyişiklər son nəticədə ilkin məsələ üçün tapılmış həllin artıq optimal olmamasına səbəb ola bilər.

Bizim məqsədimiz $Z(x)$ məqsəd funksiyasının əmsallarının elə dəyişmə intervallarını tapmaqdan ibarətdir ki, burada məhsul buraxılışı üzrə optimal plan sabit qalsın.

Bunun üçün zəruri olan hesablamaların yerinə yetirilməsi ardıcıllığını nəzərdən keçirək. Fərz edək ki, A məhsul vahidinin satışından əldə edilən P_1 mənfəət norması 5 min manatdan $(5+\Delta P_1)$ min manatadək dəyişir. Burada ΔP_1 müsbət ədəd olduqda mənfəət norması artır, mənfi ədəd olduqda isə – azalır. Onda (7.75) məqsəd funksiyası aşağıdakı şəkildə ifadə edilir:

$$Z_1(x) = (5 + \Delta P_1)\, x_1 + 2x_2 \to \max \qquad (7.106)$$

Əgər (7.75) - (7.77) düz məsələsini, ΔP_1 dəyişməsi nəzərə alınmaqla, həll etsək, onda nəticə simpleks-cədvəli

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
 & -y_1 & -y_2 & 1 \\
\hline
\to x_1 = & \dfrac{4}{20} & -\dfrac{3}{20} & 46 \\
x_2 = & -\dfrac{8}{20} & \dfrac{11}{20} & 55 \\
y_3 = & \dfrac{4}{20} & -\dfrac{18}{20} & 28 \\
\hline
\to Z_1 = & \dfrac{4}{20} + \dfrac{4}{20}\cdot\Delta P_1 & \dfrac{7}{20} - \dfrac{3}{20}\cdot\Delta P_1 & 340 + 46\cdot\Delta P_1 \\
\hline
\end{array} \qquad (7.107)$$

şəkilində alınar.

Burada ΔP_1 dəyişməsindən əvvəl (7.88) cədvəlinin Z– sətrindən fərqli olaraq, (7.107) cədvəlinin Z_1– sətrində ΔP_1 daxil olan hədlər alınmış olur. Bu zaman ΔP_1 - in əmsalları kimi (7.107) cədvəlində x_1– sətrinin uyğun ($\frac{4}{20}$;$-\frac{3}{20}$;46) elementləri çıxış edirlər.

Qeyd edək ki, (7.75) məqsəd funksiyasında x_1 məchulunun əmsalı ΔP_1 dəyişməsinə məruz qaldığı üçün (7.107) cədvəlinin məhz x_1– sətrinə baxılır.

Yeni alınmış məsələdə $Z_{1\max}$ axtarılır. Deməli, (7.89) optimal həllinin sabit qalması üçün ΔP_1- in elə qiymətləri tapılmalıdır ki, onlar (7.107) cədvəlinin Z_1 – sətrində y_1 və y_2 asılı olmayan məchullarının əmsallarının mənfi olmaması şərtlərini ödəsinlər. Bu məqsədlə aşağıdakı bərabərsizliklər sistemi həll edilir:

$$\begin{cases} \frac{4}{20}+\frac{4}{20}\cdot\Delta P_1\geq 0, \\ \frac{7}{20}-\frac{3}{20}\cdot\Delta P_1\geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\Delta P_1\geq 0, \\ 7-3\cdot\Delta P_1\geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P_1\geq -1, \\ \Delta P_1\leq 2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Alınmış nəticələr A məhsul vahidinin satışından mənfəət normasının $-1\leq\Delta P_1\leq 2\frac{1}{3}$ dəyişmə sərhədlərini müəyyən etməyə imkan verirlər. Daha sonra zəruri hesablamaları aparıb

$$5-1\leq 5+\Delta P_1\leq 5+2\frac{1}{3},$$

$$4\leq P_1\leq 7\frac{1}{3},$$

həmçinin məhsul buraxılışı üzrə (7.89) optimal planının P_1 - in dəyişməsinə nisbətən $\left[4;7\frac{1}{3}\right]$ - müvafiq dayanıqlıq intervalını təyin edirik.

Beləliklə alırıq ki, A məhsul vahidinin satışından mənfəət norması 4 min manatadək azaldıqda yaxud $7\frac{1}{3}$ min manatadək artdıqda məhsul buraxılışının $x^*=(x_1^*=46, x_2^*=55)$ optimal planı sabit qalır. $-1\leq\Delta P_1\leq 2\frac{1}{3}$ bərabərsizliyini ödəyən ΔP_1-in hər bir qiymətində müəssisənin maksimum ümumi mənfəəti isə (7.107) nəticə simpleks - cədvəlindən alınır:

$$Z_{1\max}(x)=Z_1(x^*)=340+46\cdot\Delta P_1 \quad \text{(min manat).}$$

Bunun doğruluğunu bir daha yoxlamaq üçün $x^* = (x_1^* = 46,\ x_2^* = 55)$ optimal planını (7.106) ifadəsində yerinə yazmaq kifayətdir:

$$Z_{1\,\max}(x) = Z_1(x^*) = P_1 \cdot x_1^* + 2x_2^* = 46 \cdot P_1 + 110 \text{ (min manat)},$$

burada $P_1 \in \left[4; 7\frac{1}{3}\right]$.

İndi isə fərz edək ki, B məhsul vahidimn satışından mənfəət norması 2 mim manatdan $(2+\Delta P_2)$ min manatadək dəyişir. Onda düz məsələnin məqsəd funksiyasınm ifadəsi

$$Z_{2\,\max} = 5x_1 + (2+\Delta P_2)\, x_2 \to \max, \tag{7.108}$$

nəticə simpleks - cədvəli isə aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_1 =$	$\frac{4}{20}$	$-\frac{3}{20}$	46
→ $x_2 =$	$-\frac{8}{20}$	$\frac{11}{20}$	55
$y_3 =$	$\frac{4}{20}$	$-\frac{18}{20}$	28
→ $Z_2 =$	$\frac{4}{20} - \frac{8}{20}\cdot\Delta P_2$	$\frac{7}{20} + \frac{11}{20}\cdot\Delta P_2$	$340 + 55\cdot\Delta P_2$

(7.109)

Oxşar qayda ilə alırıq:

$$\begin{cases} \frac{4}{20} - \frac{8}{20}\cdot\Delta P_2 \ge 0, \\ \frac{7}{20} + \frac{11}{20}\cdot\Delta P_2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2\cdot\Delta P_2 \ge 0, \\ 7 + 11\cdot\Delta P_2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta P_2 \le \frac{1}{2}, \\ \Delta P_2 \ge -\frac{7}{11}. \end{cases}$$

$$-\frac{7}{11} \le \Delta P_2 \le \frac{1}{2},$$

$$2-\frac{7}{11} \le 2+\Delta P_2 \le 2+\frac{1}{2},$$

$$1\frac{4}{11} \le P_2 \le 2\frac{1}{2},$$

yəni $\left[1\frac{4}{11};2\frac{1}{2}\right]$ - optimal planın P_2 əmsalının dəyişməsinə nisbətən dayanıqlıq intervalıdır.

Bu o deməkdir ki, B məhsul vahidinin satışından mənfəət norması $1\frac{4}{11}$ min manatadək azaldıqda yaxud $2\frac{1}{2}$ min manatadək artdıqda məhsul buraxılışı üzrə $x^*=(x_1^*=46, x_2^*=55)$ optimal planı sabit qalır.

$-\frac{7}{11} \le \Delta P_2 \le \frac{1}{2}$, bərabərsizliyini ödəyən ΔP_2- nin hər bir qiymətində müəssisənin maksimum ümumi mənfəəti (7.109) nəticə simpleks-cədvəlindən alınır:

$$Z_{2\max}(x) = Z_2(x^*) = 340 + 55 \cdot \Delta P_2 \text{ (min manat).}$$

Bunun da doğruluğunu bir daha yoxlamaq üçün $x^*=(x_1^*=46, x_2^*=55)$ optimal planını (7.108) ifadəsində yerinə yazmaq kifayətdir

$$Z_{2\max}(x) = Z_2(x^*) = 5 \cdot x_1^* + P_2 x_2^* = 230 + 55 \cdot \Delta P_2 \text{(min manat),}$$

burada $P_2 \in \left[1\frac{4}{11};2\frac{1}{2}\right]$.

7.6.8. Hazır məhsul satışından ümumi mənfəət və sərf edilmiş ehtiyatların ümumi dəyərinin müqayisəsi

Bu müqayisə qoşmalığın birinci (əsas) teoremi və əsas bərabərsizliyindən irəli gəlir. Qoşmalığın birinci teoremində düz və qoşma XP məsələlərinin $Z(x)$ və $W(u)$ məqsəd funksiyalarının qiymətləri arasında əlaqə yaradılır. Belə ki, qarşılıqlı qoşma məsələlərin müvafiq x^* və u^* optimal həllərində məqsəd funksiyalarının ekstremum qiymətləri bir-birinə bərabərdir:

$$Z_{\max}(x) = W_{\min}(u) \quad \text{yaxud} \quad Z(x^*) = W(u^*).$$

Qoşmalığın əsas bərabərsizliyinə əsasən isə qoşma məsələlərin istənilən x və u mümkün həllərində $Z(x) \le W(u)$ ödənilir.

Qeyd edək ki, konkret qoşma məsələlər üçün «nəticələr-xərclər»in belə müqayisə edilməsi, yəni optimal həllərin qəbul edilməsi şərti ilə alınmış nəticə və xərclərin balanslaşdırılmasının (tarazlaşdırılmasının) tədqiq olunması, baxılan məsələlərdən asılı olaraq müxtəlif iqtisadi məna kəsb edə bilər.

Verilmiş qarşılıqlı qoşma məsələlərdə, qoşmalığın birinci teoreminə əsasən belə nəticəyə gəlirik ki, yalnız hazır məhsulun buraxılışı üzrə $x^* = (x_1^* = 46, x_2^* = 55)$ optimal planı və istehsal ehtiyatlarının $u^* = (u_1^* = 0{,}20; u_2^* = 0{,}35; u_3^* = 0)$ optimal qiymətlərində məhsul satışından maksimum ümumi mənfəət sərf edilmiş ehtiyatların ümumi dəyərinə bərabərdir, yəni

$$Z_{\max}(x) = Z(x^*) = W(u^*) = W_{\min}(u) = 340 \text{ (min manat)}.$$

Bu zaman ehtiyatlardan alınmış istehsal tullantıları sıfıra bərabər olur,

$$W(u^*) - Z(x^*) = 340 - 340 = 0.$$

Başqa sözlə desək, istehsalın təşkilinin yalnız optimal variantı praktiki olaraq tətbiq edildikdə sərf edilmiş ehtiyatların ümumi dəyəri məhsul satışından alınmış ümumi mənfəətə bərabərdir.

Yerdə qalan bütün x və u mümkün planlarında $Z(x) \le 340$ (min manat) və $W(u) \ge 340$ (min manat) bərabərsizlikləri ödənir, həmçinin $W(u) - Z(x) \ge 0$ olur, yəni ehtiyatlardan istehsal tullantıları da alına bilər.

7.7. XP məsələsinin həlli üçün qoşma simpleks üsulu

Qoşma simpleks üsulu xətti proqramlaşdırmanın qoşmalıq nəzəriyyəsinə əsaslanır və ədəbiyyatda o həmçinin ***obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin ardıcıl dəqiqləşdirilməsi üsulu*** adlanır. Qoşma simpleks üsulu da, adi simpleks üsulu kimi əsas məsələ şəkilində yazılmış istənilən XP məsələsinin həllini tapmaq üçün istifadə olunur.

«Min» XP məsələsinin həlli üçün qoşma simpleks üsulunu nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, (7.1) - (7.3) və (7.5) - (7.7) qarşılıqlı qoşma olan XP məsələləri kanonik şəklə gətirilmiş və onların şərtləri vahid cədvəldə verilmişdir

			$V_1 = -x_1$	. . .	$V_s = -x_s$	. . .	$V_n = -x_n$	$W = 1$
u_1	y_1	=	a_{11}	. . .	a_{1s}	. . .	a_{1n}	a_1
. . .	. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
u_r	y_r	=	a_{r1}	. . .	a_{rs}	. . .	a_{rn}	a_r
. . .	. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
u_m	y_m	=	a_{m1}	. . .	a_{ms}	. . .	a_{mn}	a_m
1	Z	=	$-P_1$	. . .	$-P_s$	. . .	$-P_n$	0

(7.110)

Onda, yuxarıda göstərdiyimiz kimi, (7.1) - (7.3) düz məsələsini, yəni «max» XP məsələsini həll etməklə, ona qoşma olan (7.5) - (7.7) məsələsi, yəni «min» XP məsələsi də paralel surətdə həll edilir.

Beləliklə, «min» XP məsələsinin həlli üçün yeni üsul alınır ki, ona da ***qoşma simpleks üsulu*** deyilir.

«min» XP məsələsinin qoşma simpleks üsulu ilə həlli prosesi iki əsas mərhələdən ibarətdir:

I mərhələ. W məqsəd funksiyasının əmsallarının mənfilikdən azad edilməsi.

II mərhələ. Optimal həllin axtarılması.

W məqsəd funksiyasının əmsallarının mənfilikdən azad edilməsi mərhələsi aşağıdakı altmərhələlərdən ibarətdir:

1) Cədvələ keçid.

Məsələnin həlli prosesində cədvəl məlumatları, u_i və v_j məchullarının alınmış çevirmələrini izləmək üçün «min» XP məsələsinə uyğun ilkin simpleks-cədvəli (7.110) - dan ayrılıqda yazaq:

$$\begin{array}{r|ccccc|c} & u_1 & \ldots & u_r & \ldots & u_m & 1 \\ \hline V_1 = & a_{11} & \ldots & a_{r1} & \ldots & a_{m1} & -P_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_s = & a_{1s} & \ldots & \boxed{a_{rs}} & \ldots & a_{ms} & -P_s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_n = & a_{1n} & \ldots & a_{rn} & \ldots & a_{mn} & -P_n \\ \hline W = & a_1 & \ldots & a_r & \ldots & a_m & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (7.111)$$

2) W – sətir əmsallarını mənfilikdən azad etmək üçün əsas elementin seçilməsi.

Əgər W – sətrində bütün əmsallar mənfi olmazsa, onda «0» W funksiyasının qiymətlərinin aşağı sərhədidir və II mərhələyə keçmək lazımdır.

Fərz edək ki, W – sətrində $a_r < 0$ mənfi əmsalı vardır. Onu mənfilikdən azad etmək üçün aşağıdakı qaydalar əsasında əsas element tapılır:

a) Ən kiçik $a_r < 0$ mənfi əmsalının yerləşdiyi r sütununa baxılır.

Əgər r sütununda mənfi elementlər vardırsa, onda onlardan hər hansı biri, məsələn $a_{rs} < 0$ götürülür və müvafiq s sətri əsas sətir olaraq seçilir.

Qeyd 7.5. Əgər r sütununda heç bir mənfi element yoxdursa, onda ya W məqsəd funksiyası aşağıdan məhdud deyil, ya da məsələnin şərtləri uyuşmayandır.

b) W – sətir əmsallarının s sətrinin müvafiq elementlərinə olan mənfi olmayan nisbətləri tərtib edilir.

Ən kiçik nisbətin alındığı r sütunu əsas sütun olur.

v) Əsas s sətri və r sütununun kəsişməsində a_{rs} əsas elementi tapılır.

Bu elementə nəzərən adi Jordan əvəzetməsinin (AJƏ) bir addımı tətbiq edilir və nəticədə yeni a_r' əmsalı artıq müsbət olur, yəni alırıq $a_r' = \dfrac{a_r}{a_{rs}} > 0$.

Qeyd 7.6. Əgər ən kiçik nisbət sıfıra bərabər olarsa, onda məxrəc yalnız müsbət olduqda, o əsas element olaraq götürülür.

Oxşar qayda ilə simpleks-cədvəlin W – sətrindəki yerdə qalan bütün əmsallar ardıcıl olaraq mənfilikdən azad edilir.

Tutaq ki, I mərhələ yerinə yetirilmiş və nəticə cədvəli aşağıdakı şəkildə alınmışdır:

	V_1	…	V_k	u_{k+1}	…	u_r	…	u_m	1
$u_1 =$	b_{11}	…	b_{k1}	$b_{k+1,1}$	…	b_{r1}	…	b_{m1}	q_1
…		…		…	…	…			…
$u_k =$	b_{1k}	…	b_{kk}	$b_{k+1,k}$	…	b_{rk}	…	b_{mk}	q_k
$V_{k+1} =$	$b_{1,k+1}$	…	$b_{k,k+1}$	$b_{k+1,k+1}$	…	$b_{r,k+1}$	…	$b_{m,k+1}$	q_{k+1}
…		…		…	…	…			…
$V_s =$	b_{1s}	…	b_{ks}	$b_{k+1,s}$	…	$\boxed{b_{rs}}$	…	b_{ms}	q_s
…		…		…	…	…			…
$V_n =$	b_{1n}	…	b_{kn}	$b_{k+1,n}$	…	b_{rn}	…	b_{mn}	q_n
$W =$	b_1	…	b_k	b_{k+1}	…	b_r	…	b_m	Q

(7.112)

Burada W - sətrinin bütün əmsalları mənfi deyildir, yəni $b_1 \geq 0,\dots,b_m \geq 0$. Onda Q ədədi W məqsəd funksiyasının qiymətlərinin aşağı sərhədi olacaqdır və məsələnin həlli prosesini davam etdirmək üçün II mərhələyə keçmək lazımdır.

Optimal həllin axtarılması mərhələsi də aşağıdakı altmərhələlərdən ibarətdir:

1) Optimal həllin tapılması əlaməti.

(7.112) cədvəlinin sərbəst hədlərinə baxılır.

Tutaq ki, bütün sərbəst hədlər mənfi deyildir, yəni

$q_1 \geq 0,\dots,q_n \geq 0$.

Onda «min» XP məsələsinin dayaq həlli tapılmışdır və o həmçinin məsələnin optimal həllidir, belə ki, W – sətir əmsalları artıq I mərhələdə mənfilikdən azad edilmişdir.

Burada $W_{\min} = Q$ olur ki, bu da (7.112) cədvəlindən asanlıqla alınır.

Beləliklə, ***«min» XP məsələsinin qoşma simpleks üsulu ilə optimal həllinin tapılması əlaməti simpleks-cədvəlin sərbəst sütununda mənfi hədlərin və W – sətrində isə mənfi əmsalların olmamasından ibarətdir.***

2) Optimal həllin axtarılması zamanı əsas elementin seçilməsi.

a) Ən kiçik $q_s < 0$ mənfi sərbəst həddinin yerləşdiyi s sətri əsas sətir götürülür.

b) s sətrində müsbət elementlər seçilir və W - sətrinin müvafiq əmsalları onlara bölünür, alınmış nisbətlər müqayisə edilir. Ən kiçik nisbətin alındığı r sütunu əsas sütun olur.

Qeyd 7.7. Əgər ən kiçik $q_s < 0$ mənfi sərbəst həddinin yerləşdiyi s əsas sətrində heç bir müsbət element olmazsa, onda məsələnin şərtləri uyuşmayandır.

v) Əsas s sətri və r sütununun kəsişməsində b_{rs} əsas elementi tapılır. Bu elementə nəzərən AJƏ-nin bir addımı tətbiq edilir və nəticədə yeni q_s' sərbəst həddi müsbət olur, yəni

Oxşar qayda ilə simpleks-cədvəlin sərbəst sütununda qalmış bütün hədlər ardıcıl olaraq mənfilikdən azad edilir. AJƏ-nin sonlu sayda addımlarından sonra ya məsələnin məhdudiyyət şərtlərinin ziddiyyətli olduğu müəyyən edilir, ya da «min» XP məsələsinin optimal həlli tapılmış olur.

Qoşma simpleks üsulu həmçinin «max» XP məsələsinin həlli üçün də tətbiq edilir. Bu məqsədlə aşağıdakı iki üsuldan istifadə etmək olar:

I üsul. Müvafiq «min» XP məsələsinə gətirilir.

Bunun üçün «max» XP məsələsinin məqsəd funksiyası (-1) - ə vurulur və yeni alınmış «min» XP məsələsinin həlli yuxarıda göstərilmiş qaydaları tətbiq etməklə yerinə yetirilir. Bu zaman hər iki məsələnin optimal həlləri üst-üstə düşür, yəni eynidirlər. İlkin «max» XP məsələsinin məqsəd funksiyasının maksimum qiymətini almaq üçün isə «min» XP məsələsinin məqsəd funksiyası üçün tapılmış minimum qiyməti əks işarə ilə götürmək kifayətdir, yəni onu (-1) - ə vurmaq lazımdır.

II üsul. «max» XP məsələsi bilavasitə qoşma simpleks üsulu ilə həll edilir.

Bu zaman «max» XP məsələsinin həlli prosesi də iki əsas mərhələdən ibarət olur:

I mərhələ. Məqsəd funksiyasının əmsalları müsbətlikdən azad edilir.

Bu məqsədlə əvvəl göstərilmiş qaydalarda elə dəyişiklər etmək tələb olunur ki, *W* – sətrinin bütün əmsalları müsbət olmasınlar.

Ona görə də «min» XP məsələsindən fərqli olaraq, *W* – sətrində yerləşən ən böyük müsbət əmsaldan başlamaq tövsiyə olunur.

II mərhələ. Optimal həllin axtarılması.

«max» və «min» XP məsələlərində optimal həllərin axtarılması mərhələləri üst-üstə düşür. Lakin, «min» XP məsələsindən fərqli olaraq, ***«max» XP məsələsinin qoşma simpleks üsulu ilə optimal həllinin tapılması əlaməti simpleks-cədvəlin W – sətrində müsbət əmsalların və sərbəst sütunda isə mənfi hədlərin olmamasından ibarətdir.***

Qeyd 7.8. Fərz edək ki, «max» XP («min» XP) məsələsinin adi simpleks üsulu ilə dayaq həllinin axtarılması mərhələsində yaxud hələ ilkin simpleks-cədvəlin Z – sətrində yerləşən bütün əmsallar mənfi deyil (müsbət deyil). Bu zaman məsələnin həlli prosesini qoşma simpleks üsulu ilə davam etdirmək məqsədəuyğundur. Belə ki, məsələnin optimal həllini tapmaq üçün yalnız simpleks-cədvəlin sərbəst sütununda olan hədləri mənfilikdən azad etmək tələb olunur.

Qeyd 7.9. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, «max» XP («min» XP) məsələsinin adi simpleks üsulu ilə həlli prosesində, bir dayaq həlldən digərinə keçdikdə, məqsəd funksiyasının ekstremum qiymətinə aşağıdan (yuxarıdan) yaxınlaşırıq. Lakin «max» XP («min» XP) məsələsinin qoşma simpleks üsulu ilə həlli prosesində isə əksinə, yəni məqsəd funksiyasının ekstremum qiymətinə yuxarıdan (aşağıdan) yaxınlaşırıq. Bu zaman cədvəlin yuxarısında yerləşən məchulların sıfır qiymətləri məcmusu məsələnin nəinki dayaq həlli, heç mümkün həlli də olmaya bilər.

Doğrudan da, əgər (7.112) aralıq cədvəlində onun yuxarısında yerləşən məchulları sıfıra bərabər götürsək, onda sərbəst sütunda mənfi hədlər olduqda, həmçinin bəzi asılı məchullar da mənfi olurlar. Bu isə verilmiş məsələnin şərtləri ilə ziddiyyət təşkil edir.

Mövzu 8. XP – nin NƏQLİYYAT MƏSƏLƏSİ

8.1. Nəqliyyat məsələsinin (NM) iqtisadi mahiyyəti

Yuxarıda göstərildiyi kimi, iqtisadiyyatda tətbiq edilən iqtisadi - riyazi modellərin çoxu XP məsələlərinə gətirilir. Bütün bu məsələlər praktiki olaraq simpleks üsulunun bu və ya digər formada şəkli dəyişdirilmiş alqoritmləri ilə həll edilir. Bununla bərabər bəzi növ XP məsələlərini həll etmək üçün daha səmərəli hesablama üsulları işlənib hazırpanmışdır ki, onlar da verilmiş məsələlərin məhdudiyyət şərtlərinin spesifik xüsusiyyətlərinə əsaslanır.

Bu kimi məsələlərdən biri də nəqliyyat məsələsidir. Aydındır ki, NM də xətti proqramlaşdırma məsələsi olduğundan simpleks üsulu ilə həll edilə bilər. Lakin simpleks üsulunun bilavasitə NM - in həlli üçün tətbiq olunması heç də məqsədəuyğun deyilidir. Belə ki, istənilən XP məsələsinin həlli üçün istifadə olunan simpleks üsulu NM –in məhdudiyyət şərtlərinin spesifik xüsusiyyətlərini nəzərə almır və buna görə də NM – in həlli məqsədi ilə onun tətbiqi əlverişli ğeyildir.

Nəqliyyat məsələsinin iki növü fərqləndirilir: ***vaxt meyarı üzrə və dəyər meyarı üzrə.***

Vaxt meyarı üzrə NM – də bütün isıntehsal və istehlak məntəqələri arasında yüklərin daşınmasına sərf olunan müddət nəzərə alınır. Bu zaman yüykdaşıma planı o halda optimal əlur ki, yüklərin hamısı ən az vaxt ərzində isteblakçılara çatdırılsın. Xüsusi ilə tez xarab olan kənd təsərrüfatı və ərzaq məhsullarının daşınması zamanı müvafiq məsələlərə baxılmalı olur. Bu məsələlərdə əlavə nəqliyyat xərcləri ilə müqayisədə məhsulların vaxtında və lazımi keyfiyyətdə istehlakçılara çatdırılması daha vacib əhəmiyyət kəsb edir. Digər bir misal olaraq müharibə şəraitində hərbi sursatların ayrı – ayrı hissələrə daşınmasını göstərmək olar. Müvafiq məsələdə yüklərin daşınmasının ən az vaxt ərzində yerinə yetirilməsi tələb olunur, nəqliyyat xərcləri isə ikinci dərəcəli əhəmiyyətə malikdir və s.

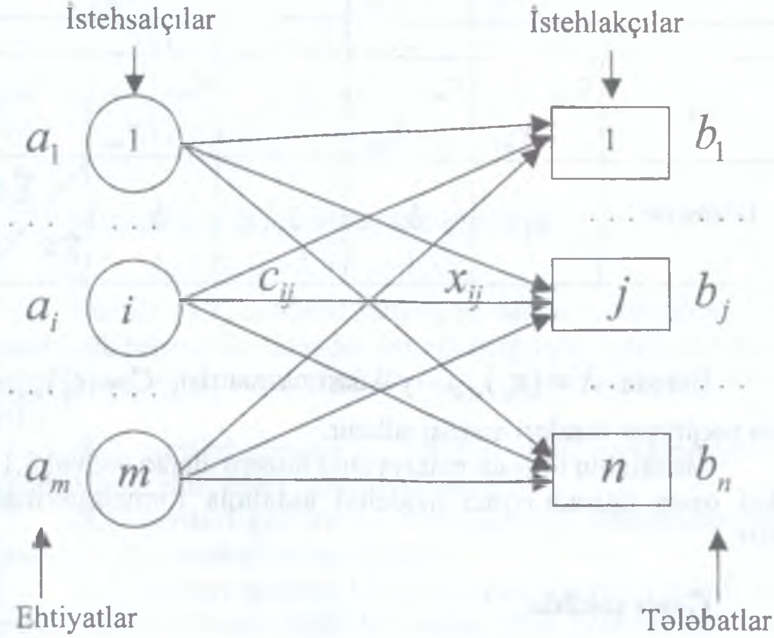
İndi isə ***dəyər meyarı üzrə nəqliyyat məsələsini nəzərdən keçirək.***

Məsələnin iqtisadi qoyuluşu. m istehsal məntəqəsində bircins məhsul ehtiyatları vardır və onlar müvafiq olaraq $a_1, a_2, ..., a_m$ vahid təşkil edirlər. Həmin məhsulu n istehlak məntəqəsinə daşımaq lazımdır və onların məhsula olan tələbatları isə müvafiq olaraq $b_1, b_2, ..., b_n$ vahid təşkil edirlər. $i\ \left(i=\overline{1,m}\right)$ istehsalçısından $j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ istehlakçısına vahid yükün daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri c_{ij} - a bərabərdir.

Elə yükdaşıma planı tərtib etməli ki, istehlak məntəqələrində məhsula olan tələbatlar tam ödənsin və yükdaşımalar ilə əlaqədar ümumi nəqliyyat xərcləri ən az olsun.

8.2. NM – in iqtisadi – riyazi modeli

x_{ij} ilə i istehsalçısından j istehlakçısına daşınan yükün miqdarını işarə edək. Onda ümumi qoyuluşda NM –i sxematik olaraq şəkil 8.1 – də olduğu kimi göstərmək olar.



Şəkil 8.1.

Bununla bərabər NM – in bütün şərtlərini aşağıdakı vahid cədvəl şəklində vermək məqsədəuyğundur:

Cədvəl 8.1

İstehsal məntəqələri	**İstehlak məntəqələri**				**Ehtiyatlar**
	1	**2**	**...**	**n**	
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Tələbatlar	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ \ $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Burada $X=(x_{ij})_{m,n}$ - yükdaşıma matrisi, $C=(c_{ij})_{m,n}$ - isə nəqliyyat xərcləri matrisi adlanır.

Məsələnin iqtisadi mahiyyətini nəzərə alaraq cədvəl 8.1-dən onun iqtisadi-riyazi modelini asanlıqla formalaşdırmaq olar.

Geniş şəkildə:

Məqsəd fuksiyası

$$
\begin{aligned}
Z(X) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1m}x_{1m} + \\
& + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... + c_{2m}x_{2m} + \\
& .... \\
& + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min;
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1m} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2m} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases} \tag{8.2}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1m} + x_{2m} + \ldots + x_{mn} = b_m. \end{cases} \tag{8.3}$$

Məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$x_{ij} \geq 0, \ (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}). \tag{8.4}$$

Burada (8.1) məqsəd funksiyası bütün məntəqələr arasında yükdaşıma ilə əlaqədar ümumi nəqliyyat xərclərini ifadə edir. Ona görə də həmin funksiya üçün minimum qiymət axtarılır.

(8.2) şərtləri göstərir ki, bütün istehsal məntəqələrində olan məhsul ehtiyatları tamamilə daşınır.

(8.3) şərtləri göstərir ki, bütün istehlak məntəqələrində məhsula olan tələbatlar tam ödənilir.

(8.4) şərtləri göstərir ki, yükdaşıma həcmləri mənfi kəmiyyətlə xarakterizə edilə bilməzlər. Ona görə də müvafiq məchullar (x_{ij}) mənfi deyildirlər.

Tərif 8.1.* *(8.2) - (8.4) şərtlərini ödəyən $X = (x_{ij})_{m,n}$ matrisinə nəqliyyat məsələsinin planı (həlli) deyilir.

Tərif 8.2. **Əgər (8.2) və (8.3) şərtlərində $x_{ij} > 0$ məchulların əmsallarından ibarət sütun – vektorları sistemi xətti asılı olmazsa, onda $X = (x_{ij})_{m,n}$ *planına NM – in dayaq planı deyilir.***

Qeyd 8.1. x_{ij} - ların əmsallarından ibarət hər bir sütun – vektoru cəmi m + n sayda koordinatlara malikdir. Onlardan yalnız ikisi sıfırdan fərqlidir və vahidə, yəni 1 – ə bərabərdir. Bu zaman vektorun birinci vahidi i – ci, ikinci vahidi isə (m + j) – ci yerdə verilir.

Asanlıqla isbat etmək olar ki, NM – in sütun – vektorlarından ibarət sistemin ranqı (m + n – 1) – ə bərabrdir. Ona görə də NM – in dayaq planında sıfırdan fərqli olan x_{ij} koordinatlarının sayı (m + n – 1) – dən çox ola bilməz.

Tərif 8.3. Əgər NM – in dayaq planında sıfırdan fərqli komponentlərin sayı (m + n – 1) – ə bərabər olarsa, ona cırlaşmayan, əks halda isə - cırlaşan dayaq plan deyilir.

Tərif 8.4. (8.1) məqsəd funksiyasına minimum qiymət verən $X = (x_{ij})_{m,n}$ ***planına nəqliyyat məsələsinin optimal planı deyilir.***

(8.1) - (8.4) nəqliyyat məsələsini həll etməkdən məqsəd onun optimal planını tapmaqdan ibarətdir.

Yığcam şəkildə, yəni ($\sum$) işarəsindən istifadə etməklə NM – in iqtisadi – riyazi modeli aşağıdakı şəkildə olur:

məqsəd funksiyası

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{8.5}$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad (i = \overline{1,m}), \tag{8.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad (j = \overline{1,n}), \tag{8.7}$$

məchulların mənfi olmaması şərtləri

$$x_{ij} \geq 0; \quad (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}). \tag{8.8}$$

8.3 NM – in həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt

Teorem 8.1. ***XP-nin nəqliyyat məsələsinin həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt istehsal məntəqələrində olan ümumi məhsul ehtiyatının istehlak məntəqələrində olan ümumi tələbata bərabər olmasından ibarətdir:***

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{8.9}$$

yəni məsələ qapalı olmalıdır.

İsbatı. Zərurilik. Tutaq ki, $X' = (X'_{ij})_{m,n}; (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ (8.5) – (8.8) NM-in mümkün həllidir. İsbat edək ki, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Doğrudan da, X' həllini (8.6) və (8.7) məhdudiyyət şərtlərinə daxil olan tənliklərdə yerinə yazsaq, alarıq:

$$\sum_{j=1}^{n} X'_{ij} = a_i; \quad (i = \overline{1,m});$$

$$\sum_{i=1}^{m} X'_{ij} = b_j; \quad (j = \overline{1,n}).$$

Alınmış tənliklər sistemini müvafiq olaraq i və j indeksləri üzrə tərəf-tərəfə cəmləyək:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i; \tag{8.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} X'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{8.11}$$

Bu münasibətlərin sol tərəfləri eyni bir kəmiyyəti ifadə edirlər. Deməli, onların sağ tərəfləri də bir-birinə bərabər olmalıdır, yəni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (8.12)$$

Zərurilik isbat olundu.

Kafilik. Tutaq ki, (8.5) - (8.8) məsələsi qapalıdır, daha doğrusu, $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = L$. İsbat edək ki, bu halda NM-in nəinki mümkün həlli, onun həmçinin optimal həllli də vardır.

Əvvəla göstərək ki, NM-in mümkün həllər çoxluğu boş deyildir. Doğrudan da, istehsal və istehlak məntəqələri arasında yükdaşıma həcmlərini

$$X'_{ij} = \frac{a_i b_j}{L}; \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \qquad (8.13)$$

düstürü ilə təyin edək. İsbat edək ki, onda

$$X' = (X'_{ij})_{m,n} = \left(\frac{a_i b_j}{L} \right)_{m,n}; \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \qquad (8.14)$$

(8.5) – (8.8) NM-in mümkün həllidir.

(8.6) - (8.8) sistemlərinə daxil olan şərtlərdə X'-i yerinə yazsaq müvafiq olaraq alarıq:

$$\sum_{j=1}^{n} X'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{L} = \frac{a_i}{L} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{L} \cdot L = a_i;\ (i = \overline{1,m});$$

$$\sum_{i=1}^{m} X'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{L} = \frac{b_j}{L} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{L} \cdot L = b_j;\ (j = \overline{1,n}).$$

$$X'_{ij} = \frac{a_i b_j}{L} \geq 0; \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$$

Alırıq ki, məsələnin məhdudiyyət şərtləri və ona daxil olan məchulların mənfi olmaması şərtləri ödənilir. Deməli, X' - (8.5) – (8.8) nəqliyyat məsələsinin mümkün həllidir.

İsbat edək ki, NM-in həm də optimal həlli vardır.

Aydındır ki, istehsal və istehlak məntəqələri arasında yük vahidinin daşınması xərcləri yuxarıdan və aşağıdan məhduddurlar, yəni

$$R \le C_{ij} \le S; \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n});$$

burada R və S - sabit ədədlərdir. Onda aşağıdakı münasibətləri yaza bilərik:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} RX_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} SX_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le Z(X) \le S\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \Rightarrow \qquad (8.15)$$

$$\Rightarrow RL \le Z(X) \le SL.$$

Beləliklə, (8.15) – dən göründüyü kimi Z(X) məqsəd funksiyası (8.5) – (8.8) NM - in mümkün həlləri çoxluğunda yuxarıdan və aşağıdan məhduddur. Deməli, funksiyanın minimum qiyməti vardır və o, yalnız məsələnin optimal həllində alınır.

Teorem isbat olundu.

8.4. Açıq nəqliyyat məsələsinin qapalı məsələyə gətirilməsi

Əgər istehsal məntəqələrindəki ümumi məhsul ehtiyatı istehlak məntəqələrindəki ümumi tələbata bərabər olarsa, yəni (8.9) şərti ödənirsə, onda ***NM qapalı məsələ, onun modeli isə qapalı model adlanır.***

Əgər (8.9) şərti ödənmirsə, onda ***NM açıq məsələ, onun modeli isə açıq model adlanır.***

Qeyd edək ki, «potensiallar üsulu» yalmz qapalı məsələni həll etmək üçün tətbiq edilir. Ona görə də hər bir açıq NM, həll edilmək məqsədi ilə, əvvəlcə uyğun qapalı məsələyə gətirilməlidir. Bu zaman aşağıdakı hallar mümkündür:

1-ci hal. Ümumi məhsul ehtiyatı tələbatdan çoxdur, yəni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{8.16}$$

Онда məsələyə *(n + 1)* - ci şərti istehlakcı daxil edilir və onun məhsula olan tələbatı aşağıdakı fərqlə təyin edilir:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{8.17}$$

bu zaman bütün istehsalçılardan şərti istehlakçıya yükdaşıma xərcləri sıfıra bərabər götürülür, yəni

$$c_{i,n+1} = 0; \quad (i = \overline{1,m}) \,. \tag{8.18}$$

Beləliklə alırıq ki,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \,. \tag{8.19}$$

2 - ci hal. Ümumi məhsul ehtiyatı tələbatdan azdır, yəni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{8.20}$$

Onda məsələyə *(m+1)* - ci şərti istehsalçı daxıl edilir və buradakı məhsul ehtiyatı aşağıdakı fərqlə təyin edilir:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \,. \tag{8.21}$$

Bu zaman şərti istehsalçıdan bütün istehlakçılara yükdaşıma xərcləri sıfıra bərabər götürülür, yəni

$$c_{m+1,j} = 0; \quad (j = \overline{1,n}) \,. \tag{8.22}$$

Nəticədə

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{alırıq.} \tag{8.23}$$

Beləliklə, əgər verilmiş NM açıq olarsa, onda yuxarıda deyilənlərə əsaslanaraq, (8.9) bərabərliyinin doğru olması nəzərə alınmaqla, məsələnin şərtlərindən ibarət müvafiq cədvəli yenidən yazmaq lazımdır.

Qeyd 8.2. Göstərilən hər iki halda qapalı NM-in optimal planından ilkin açıq NM-in optimal planı asanlıqla alınır. Bunun üçün şərti istehlakçıya (şərti istehsalçıdan) daşınan yükdaşıma həcmlərini nəzərə almamaq kifayətdir.

8.5. NM - in ilkin dayaq planının tapılması üsulları

NM-in ilkin dayaq planının tapılması üçün bir neçə üsul mövcuddur:

- şimal-qərb bucaq üsulu (yaxud diaqonal üsulu);
- mimimum dəyər üsulu (yaxud ən kiçik element üsulu);
- iki dəfə nəzərəalma üsulu;
- Fogelin approksimasiya üsulu.

Bu üsulların mahiyyəti ondan ibarətdir ki, məsələnin ilkin dayaq planı ardıcıl olaraq tətbiq edilən $(m + n - 1)$ sayda addımların nəticəsində tapılır. Hər bir addımda məsələnin şərtləri verilmiş cədvəlin müəyyən bir xanasında yükdaşıma həcmi təyin edilir ki, o da **dolu xana** adlanır. Bununla da istehlak məntəqələrindən birində (dolu xananın yerləşdiyi sütuna uyğun) məhsula olan tələbatın tam ödənilməsi, ya da istehsal məntəqələrinin birindən (dolu xananın yerləşdiyi sətirə uyğun) məhsul ehtiyatının tam daşınması təmin edilir.

Birinci halda dolu xananın yerləşdiyi sütun müvəqqəti olaraq nəzərə alınmır və yeni məsələyə baxılır. Məsələnin şərtləri cədvəlində sütunların sayı, verilmiş addımdan əvvəlki ilə müqayisədə, bir vahid az olur, sətirlərin sayı isə eyni qalır.

Bu zaman müvafiq istehlak məntəqəsindəki tələbatın tam ödənilməsi ilə əlaqədar olaraq dolu xananın yerləşdiyi istehsal məntəqəsində məhsul ehtiyatı dəyişir.

İkinci halda dolu xananın yerləşdiyi sətir müvəqqəti olaraq nəzərə alınmır və yeni məsələnin şərtləri cədvəlində sətirlərin sayı bir vahid az olur, sütunların sayı isə eyni qalır. Bu zaman müvafiq istehsal məntəqəsindən məhsul ehtiyatının tam daşınması ilə əlaqədar olaraq dolu xananın yerləşdiyi istehlak məntəqəsində məhsula olan tələbat dəyişir.

Yuxarıda göstərilən oxşar addımlar $(m + n - 2)$ dəfə yerinə yetirildikdən sonra bir istehsal məntəqəsi və bir istehlak məntəqəsi daxil olan məsələ alınır. Burada bir boş xana qalır, istehsal məntəqəsindəki məhsul ehtiyatı isə yeganə istehlak məntəqəsində olan tələbata bərabər olur. Bu xanadakı yükdaşıma həcmini müəyyən etmək üçün $(m + n - 1)$ – ci addım yerinə yetirilir. Nəticədə NM-in ilkin dayaq planı təyin edilir.

Qeyd edək ki, müəyyən bir addımda (sonuncudan başqa) elə hal ola bilər ki, növbəti istehlak məntəqəsindəki tələbat növbəti istehsal məntəqəsindəki məhsul ehtiyatına bərabər olsun. Bu halda həmçinin müvəqqəti olaraq ya müvafiq sütun, ya da sətir, daha doğrusu onlardan hər hansı biri nəzərə alınmır.

Beləliklə, ya müvafiq istehsal məntəqəsindəki məhsul ehtiyatı, ya da istehlak məntəqəsindəki tələbat sıfra bərabər götürülür. Bu sıfır növbəti yükdaşınan xanada yazılır. Yuxarıda göstərilən şərtlər $(m + n - 1)$ sayda dolu xanaların alınmasına zəmanət verir ki, burada da ilkin dayaq planın $(m + n - 1)$ – dən çox olmayan müsbət komponentləri yerləşir. Bu isə tapılmış dayaq planın optimal olması və NM-in optimal planının tapılması üçün ilkin şərtdir.

8.5.1. Şimal – qərb bucaq üsulu

Verilmiş üsul olduqca sadədir və burada nəqliyyat xərclərinə heç bir əhəmiyyət verilmir. NM-in ilkin dayaq planını taparkən cədvəldə xanaların doldurulması x_{11} məchulunun yerləşdiyi yuxarı sol xanadan («şimal - qərb bucağı») başlanır ki, bu da x_{mn} məchulunun yerləşdiyi xanada qurtarır. Hər bir addımda yerdə qalan istehsal məntəqələrindən birincisi və yerdə qalan istehlak məntəqələrindən birincisinə baxılır. Bu zaman istehsal məntəqəsindəki məhsul ehtiyatı o vaxta qədər növbəti istehlak məntəqələrində olan tələbatları ödəmək üçün istifadə edilir ki, o tam qurtarmış olsun. Bundan sonra növbəti istehsal məntəqəsindəki məhsul ehtiyatı istifadə olunur və s. Beləliklə, NM-in ilkin dayaq planının tapılması prosesi eyni növ addımlardan ibarət olur. Hər bir addımda növbəti istehsal məntəqəsində qalmış ehtiyatlar və növbəti istehlak məntəqəsində qalmış tələbatlardan asılı olaraq yalnız bir xanada yükdaşıma təyin edilir və müvafiq olaraq bir istehsalçı, yaxud istehlakçı məsələnin şərtləri cədvəlindən çıxarılır. Şimal-qərb bucaq üsulu ilə ilkin dayaq plana daxil olan yükdaşıma həcmlərinin təyini alqoritminə baxaq:

x_{11}- in qiymətinin təyin edilməsindən başlayaq:

1) Əgər $a_1 < b_1$ olarsa, onda

$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = a_1$ və 1-ci sətrin yerdə qalan bütün boş xanalarındakı yükdaşıma həcmləri

$$x_{12} = x_{13} = \ldots = x_{1n} = 0 \quad \text{olur.}$$

Nəticədə birinci sitehsal məntəqəsində qalmış məhsul ehtiyatı, sıfra bərabər olur və buna görə də ona bir daha baxılmır. Bununla bərabər birinci istehlak məntəqəsində qalmış tələbat aşağıdakı fərqlə hesablanır

$$\Delta b_1 = b_1 - a_1.$$

Bu tələbat isə ikinci istehsal məntəqəsindən gətirilmiş məhsul əsasında ödənilə bilər, yəni

$$x_{21} = \min\{a_2, \Delta b_1\} \text{ və s.}$$

2) əgər $a_1 > b_1$ olarsa, onda

$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = b_1$ və 1-ci sütunun yerdə qalan bütün boş xanalarındakı yükdaşıma həcmləri

$$x_{21} = x_{31} = \ldots = x_{m1} = 0 \quad \text{olur.}$$

Nəticədə birinci istehsal məntəqəsindəki tələbat tam ödənilir və buna görə də ona bir daha baxılmır. Bununla bərabər birinci istehsal məntəqəsində qalmış məhsul ehtiyatı aşağıdakı fərqlə hesablanır

$$\Delta a_1 = a_1 - b_1 .$$

Bu ehtiyat isə ikinci istehlak məntəqəsinə göndərilə bilər, yəni

$$x_{12} = \min\{\Delta a_1, b_2\} \text{ və s.}$$

3) əgər $a_1 = b_1$ olarsa, onda $x_{11} = a_1 = b_1$ olur. Bu zaman ya birinci istehsal məntəqəsinə baxılmır, yəni $\Delta a_1 = 0$ və bütün $x_{12} = x_{13} = \ldots = x_{1n} = 0$ olur; ya da birinci istehlak məntəqəsinə baxılmır, yəni $\Delta b_1 = 0$ və bütün $x_{21} = x_{31} = \ldots = x_{m1} = 0$ olur.

Beləliklə, ümumi şəkildə alırıq:

1) əgər $a_i < b_j$ olarsa, onda

$x_{ij} = \min\{a_i, b_j\} = a_i$ və bütün $x_{il} = 0$ $(l = \overline{1,n};\ l \neq j)$.

Nəticədə i istehsal məntəqəsinə bir daha baxılmır və j istehlak məntəqəsində qalmış tələbat aşağıdakı fərqlə hesablanır

$$\Delta b_j = b_j - a_i .$$

2) əgər $a_i > b_j$ olarsa, onda

$x_{ij} = \min\{a_i, b_j\} = b_j$ və bütün $x_{kj} = 0$ $(k = \overline{1,m};\ k \neq i)$.

Nəticədə j istehlak məntəqəsinə bir daha baxılmır və i istehsal məntəqəsində qalmış məhsul ehtiyatı aşağıdakı fərqlə hesablanır

$$\Delta a_i = a_i - b_j .$$

3) əgər $a_i = b_j$ olarsa, onda $x_{ij} = a_i = b_j$ olur.

Bu zaman ya i istehsal məntəqəsinə baxılmır, yəni $\Delta a_i = 0$ və bütün $x_{il} = 0 \quad (l = \overline{1,n}; l \neq j)$; ya da j istehlak məntəqəsinə baxılmır, yəni $\Delta b_j = 0$ və bütün $x_{kj} = 0$ $(k = \overline{1,m}; k \neq i)$.

Sıfır yükdaşıma həcmini yalnız o halda cədvələ daxil etmək lazımdır ki, *(i, j)* xanası doldurulmalı olsun. Daha doğrusu əgər i istehsal məntəqəsində sıfır məhsul ehtiyatı yaxud j istehlak məntəqəsində sıfır tələbat qalırsa, onda cədvəlin plana daxil ediləcək növbəti *(i, j)* xanasındakı yükdaşıma həcmi sıfıra bərabər olur. Bundan sonra müvafiq istehsalçı, yaxud istehlakçı məntəqəyə bir daha baxılmır.

Səhv etməmək üçün diqqət yetirmək lazımdır ki, NM-in tapılmış dayaq planında dolu xanaların sayı $N = m + n - 1$ – dən çox olmamalıdır.

Misal 8.1. Şimal – qərb bucaq üsulundan istifadə etməklə ilkin məlumatları cədvəl 8.2 - də verilmiş nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planını tərtib edin:

Cədvəl 8.2

İstehsal məntəqələri	*İstehlak məntəqələri*					*Ehtiyat-lar*
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	
1	*9*	*6*	*17*	*11*	*8*	*200*
2	*13*	*4*	*9*	*5*	*7*	*250*
3	*6*	*7*	*14*	*10*	*6*	*150*
Tələbatlar	*120*	*180*	*105*	*90*	*105*	a_i \ b_j

Həlli

Ümumi məhsul ehtiyatını və ona olan tələbatı hesablayaq:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 200 + 250 + 150 = 600,$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 120 + 180 + 105 + 90 + 105 = 600$$

$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 600$ olduğundan verilmiş NM qapalı məsələdir və bilavasitə onun həllinə keçmək olar.

NM-in ilkin dayaq planını şimal-qərb bucaq üsulu ilə tərtib edək.

1) Əvvəlcə (1,1) xanasındakı yükdaşıma həcmini, daha doğrusu x_{11}- in qiymətini təyin edək. Bu məqsədlə 1-ci istehsal məntəqəsindəki məhsul ehtiyatını bölüşdürək. Onun ehtiyatı $a_1 = 200$ olub, 1 -ci istehlakçının $b_1 = 120$ tələbatından çox olduğu üçün, alırıq:

$$x_{11} = \min\{200, 120\} = 120, \ x_{21} = x_{31} = 0$$

və 1-ci istehlak məntəqəsinə baxılmır. 1-ci istehsal məntəqəsində qalmış məhsul ehtiyatı isə aşağıdakı fərqlə hesablanır:

$$\Delta a_1 = a_1 - b_1 = 200 - 120 = 80.$$

2) $\Delta a_1 = 80 < b_2 = 180$ oduğu üçün, alırıq

$$x_{12} = \min\{80, 180\} = 80, \ x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$$

və 1-ci istehsal məntəqəsinə baxılmır. 2-ci istehlak məntəqəsində ödənilməmiş tələbat isə aşağıdakı fərqlə təyin edilir

$$\Delta b_2 = b_2 - \Delta a_1 = 180 - 80 = 100.$$

x_{ij} məchullarının qiymətlərinin təyini üzrə oxşar hesablamalar müvafiq düzbucaqlının diaqonalı boyunca aparılır (bax cədvəl 8.3).

3) $x_{22} = \min\{250,100\} = 100$, onda $x_{32} = 0$.

4) $x_{23} = \min\{150,105\} = 105$, onda $x_{13} = x_{33} = 0$.

5) $x_{24} = \min\{45,90\} = 45$, onda $x_{25} = 0$.

6) $x_{34} = \min\{150,45\} = 45$, onda $x_{35} = 105$.

7) İstehsalçılarda olan bütün məhsul ehtiyatları daşınmış və istehlakçıların məhsula olan tələbatları isə tam ödənilmişdir.

Qeyd 8.3. Aparılmış hər bir hesablamadan sonra alınmış nəticələr cədvəl 8.3 - də əlavə olaraq verilmiş «qalmış tələbatlar» - sətrində və «qalmış ehtiyatlar» - sütununda müvafiq hesablama nömrəsi ilə göstərilmişdir.

Cədvəl 8.3

9 120	6 80	17 0	11 0	8 0	200
13 0	4 100	9 105	5 45	7 0	250
6 0	7 0	14 0	10 45	6 105	150
120	180	105	90	105	600 \ 600

Qalmış ehtiyatlar

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
80	0	0	0	0	0	0
250	250	150	45	0	0	0
150	150	150	150	150	105	0

Qalmış tələbatlar

0	180	105	90	105	1)
0	100	105	90	105	2)
0	0	105	90	105	3)
0	0	0	90	105	4)
0	0	0	45	105	5)
0	0	0	0	105	6)
0	0	0	0	0	7)

Beləliklə, verilmiş NM-in şimal - qərb bucaq üsulu ilə tərtib edilmiş ilkin dayaq planı aşağıdakı şəkildə olur:

Cədvəl 8.4

İstehsal məntəqələri	**İstehlak məntəqələri** 1	2	3	4	5	**Ehtiyatlar**
1	9 / 120	6 / 80	17	11	8	200
2	13	4 / 100	9 / 105	5 / 45	7	250
3	6	7	14	10 / 45	6 / 105	150
Tələbatlar	120	180	105	90	105	a_i \ b_j

Cədvəl 8.4 - dən göründüyü kimi $x_{ij} > 0$ - a malik dolu xanaların sayı

$$N = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$$

olduğundan ilkin dayaq plan cırlaşmayandır.

$$X^1 = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 105 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & 105 \end{pmatrix}$$

dayaq planında ümumi nəqliyyat xərclərini hesablayaq:

$$Z_1 = Z(X^1) = 9\cdot 120 + 6\cdot 80 + 4\cdot 100 + 9\cdot 105 +$$
$$+ 5\cdot 45 + 10\cdot 45 + 6\cdot 105 = 4210,$$

yəni $Z_1 = 4210$.

8.5.2. Minimum dəyər üsulu

NM-in ilkin dayaq planının şimal-qərb bucaq üsulu ilə tapılması prosesində müvafiq alqoritmin hər bir addımında yerdə qalan istehlak məntəqələrindən birincisinin tələbatı yerdə qalan istehsal məntəqələrindən birincisində olan məhsul ehtiyatları əsasında ödənilirdi. Lakin istehlak və istehsal məntəqələrini seçərkən yükdaşımalarla əlaqədar nəqliyyat xərclərindən ibarət $C=(c_{ij})_{m,n}$ matrisinin nəzərə alınması daha məqsədəuyğundur. Bu zaman hesablama alqoritminin hər bir addımında cədvəlin o xanasında yükdaşıma həcmini təyin etmək lazımdır ki, burada mıvafiq istehsal və istehlak məntəqələri arasındakı nəqliyyat xərcləri ən azdır, yəni $\min_{i,j}\{c_{ij}\}$.

Əgər ən az daşıma xərclərinə malik bir neçə xanalar mövcud olarsa, onda maksimum yükdaşıma həcmi mümkün olan xana doldurulur.

Minimum dəyər üsulunun mahiyyəti cədvəldəki ən kiçik nəqliyyat xərclərinə malik xananın seçilməsindən və doldurulmasından ibarətdir.

Bununla əlaqədar olaraq, minimum dəyər üsulu ilə tapılmış ilkin dayaq plana uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri çox hallarda şimal-qərb bucaq üsulunu tətbiq etməklə tərtib edilmiş dayaq plana uyğun ümumi nəqliyyat xərclərinə nisbətən az olur və adətən NM-in optimal planına daha yaxın olur.

Şimal-qərb bucaq üsulunda olduğu kimi, NM-in dayaq planının minimum dəyər üsulu ilə tapılması alqoritmi də oxşar addımların ardıcıl tətbiqi prosesindən ibarətdir və hər bir addımda cədvəlin yalnız bir xanasında yükdaşıma həcmi təyin edilir.

Nəticədə cədvəldəki ya bir sətir (istehsal məntəqəsi), yaxud bir sütun (istehlak məntəqəsi) nəzərə alınmır.

Daha dəqiq desək, əgər məhsul ehtiyatları tam istifadə olunubsa, onda müvafiq istehsalçı məntəqə, əgər tələbatı tam ödənibsə, onda müvafiq istehlakçı məntəqəyə sonradan baxılmır. Bununla bərabər, əgər məhsul ehtiyatları sıfra bərabər olan istehsal məntəqəsi çıxarılmırsa, onda növbəti addımda verilmiş məntəqədən yük göndərmək tələb olunduqda müvafiq xanada sıfır yazılır və yalnız bundan sonra həmin məntəqəyə bir daha baxılmır. İstehlak məntəqəsi də oxşar qayda ilə cədvəldən çıxarılır.

Misal. 8.2. Minimum dəyər üsulundan istifadə etməklə ilkin məlumatları cədvəl 8.2 - də verilmiş nəqliyyat məsələnin ilkin dayaq planını tərtib edin.

Həlli

Verilmiş NM qapalı məsələ olduğundan bilavasitə onun dayaq planının təyin edilməsinə keçirik.

1) Nəqliyyat xərcləri matrisinin elementləri içərisində ən kiçik element $c_{22} = 4$ seçilir. Bu 2-ci istehsal məntəqəsindən 2 - ci istehlakçıya yük vahidinin daşınması xərcidir. Müvafiq (2,2) xanasına masimum yükdaşıma həcmini yazırıq ki, o da aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{250,180\} = 180.$$

2-ci istehlak məntəqəsində tələbat ödənildiyindən ona (uyğun 2 - ci sütuna) bir daha baxmırıq və həmin sütundakı yerdə qalan xanalardakı yükdaşıma həcmləri sıfra bərabər olur, yəni $x_{12} = x_{32} = 0$. Bu zaman 2-ci istehsal məntəqəsindəki məhsul ehtiyatları 180 vahid azalmış olur, daha doğrusu alırıq:

$$\Delta a_2 = a_2 - b_2 = 250 - 180 = 70$$

Daha sonra zəruri xanaların seçilməsi və doldurulması üçün oxşar addımlar yerinə yetirilir:

2) $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\} = c_{24} = 5.$

$x_{24} = \min\{70, 90\} = 70$, onda $x_{21} = x_{23} = x_{25} = 0$

3) $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\} = c_{31} = 6.$

$x_{31} = \min\{150, 120\} = 120$, onda $x_{11} = 0$.

4) $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\} = c_{35} = 6$.

$x_{35} = \min\{30, 105\} = 30$, onda $x_{33} = x_{34} = 0$.

5) $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\} = c_{15} = 8$.

$x_{15} = \min\{200, 75\} = 75$.

6) $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\} = c_{14} = 11$.

$x_{14} = \min\{125, 20\} = 20$.

7) $c_{13} = 17$ və $x_{13} = 105$.

Aparılmış hesablamaların nəticələri cədvəl 8.5 - də göstərilmişdir.

Cədvəl 8.5

						Qalmış ehtiyatlar 1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
9 0	6 0	17 105	11 20	8 75	200	200	200	200	200	125	105	0
13 0	4 180	9 0	5 70	7 0	250	70	0	0	0	0	0	0
6 120	7 0	14 0	10 0	6 30	150	150	150	30	0	0	0	0
120	180	105	90	105	600 600							

Qalmış tələbatlar

120	0	105	90	105	1)
120	0	105	20	105	2)
0	0	105	20	105	3)
0	0	105	20	75	4)
0	0	105	20	0	5)
0	0	105	0	0	6)
0	0	0	0	0	7)

Beləliklə verilmiş NM-in minimum dəyər üsulu ilə tapılmış ilkin dayaq planı aşağıdakı şəkildə olur:

Cədvəl 8.6

İstehsal məntəqələri	İstehlak məntəqələri					Ehtiyatlar
	I	2	3	4	5	
1	9	6	17 / 105	11 / 20	8 / 75	200
2	13	4 / 180	9	5 / 70	7	250
3	6 / 120	7	14	10	6 / 30	150
Tələbatlar	120	180	105	90	105	a_i / b_j

Cədvəl 8.5-dən göründüyü kimi, $x_{ij} > 0$ ilə doldurulmuş xanaların sayı $N = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ - yə bərabərdir və buna görə də tapılmış dayaq plan cırlaşmayandır.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 105 & 20 & 75 \\ 0 & 180 & 0 & 70 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

ilkin dayaq planına uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri isə

$$Z(X) = 17 \cdot 105 + 11 \cdot 20 + 8 \cdot 75 + 4 \cdot 180 + 5 \cdot 70 + 6 \cdot 120 + 6 \cdot 30 = 4575$$

təşkil edir.

8.5.3. İki dəfə nəzərəalma üsulu

Çox zaman böyük ölçüyə malik NM-i həll etmək tələb olunur və verilmiş ilkin məlumatlardan ibarət uyğun cədvəl dayaq planın tapılması prosesində elementlərin seçilməsi və zəruri hesablamaların aparılması ilə əlaqədar müəyyən çətinliklərə səbəb olur. Bu kimi hallarda ikidəfə nəzərəalma üsulundan istifadə etmək əlverişlidir ki, onun da mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir.

Burada müvafiq ilkin məlumatlar cədvəlinin hər bir sətrində ən kiçik nəqliyyat xərci təyin edilir və onun daxil olduğu xanada * işarəsi qeyd edilir. Daha doğrusu əgər $\min_j \{c_{ij}\} = c_{il}$, $(i = \overline{1,m};\ j = l)$ olarsa, onda (i,l) xanasında * işarəsi qeyd edilir.

Daha sonra cədvəlin hər bir sütununda da ən kiçik nəqliyyat xərci tapılır. Daha doğrusu əgər $\min_i \{c_{ij}\} = c_{kj}$, $(i = k;\ j = \overline{1,n})$ olarsa, onda (k,j) xanasında * işarəsi qeyd edilir.

Beləliklə, nəticədə cədvəlin bəzi xanalarında iki dəfə qeyd aparılır və aydındır ki, onlar ** işarələrinə malik olurlar. Daha doğrusu əgər $\min_j \{c_{ij}\} = \min_i \{c_{ij}\} = c_{kl}$, $(i = k;\ j = l)$ olarsa, onda (k,l) xanasında ** qeyd edilmiş olur. Deməli, cədvəlin bu xanalarında həm sətir, həm də sütunlar üzrə ən kiçik nəqliyyat xərcləri yerləşir. Həmin xanalarda maksimum mümkün olan yükdaşıma həcmləri yazılır. Bu zaman hər bir addımdan sonra məhsul ehtiyatları tam istifadə olunduqda uyğun istehsal məntəqəsi, tələbat tam ödənildikdə isə uyğun istehlak məntəqəsinə bir daha baxılmır. Daha sonra * işarəsi qeyd olunmuş xanalarda yükdaşıma həcmləri eyni qayda ilə təyin edilir. Qeyd edək ki, bu zaman həm **, həm də * işarələri olan xanalarda yükdaşıma həcmləri, qalmış məhsul ehtiyatları və tələbatlar şimal-qərb bucaq üsulunda olduğu kimi tapılır. Cədvəlin yerdə qalan boş xanalarındakı yükdaşıma həcmləri isə minimum dəyər üsulu ilə təyin edilir.

Misal 8.3. İkidəfə nəzərəalma üsulundan istifadə etməklə ilkin məlumatları cədvəl 8.7 - da verilmiş nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planını tərtib edin.

Cədvəl 8.7

İstehsal məntəqələri	İstehlak məntəqələri						Ehtiyatlar
	1	2	3	4	5	6	
1	6	3	10	8	12	7	220
2	5	9	2	11	4	6	170
3	11	4	7	6	10	3	240
4	7	10	12	9	2	5	320
Tələbatlar	160	200	80	190	130	190	a_i / b_j

Həlli

Ümumi məhsul ehtiyatını və ona olan tələbatı hesablayaq:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 220 + 170 + 240 + 320 = 950,$$

$$\sum_{j=1}^{6} b_j = 160 + 200 + 80 + 190 + 130 + 190 = 950.$$

$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{6} b_j = 950$ olduğundan verilmiş NM qapalı məsələdir və bilavasitə onun həllinə keçmək olar.

NM-in ilkin dayaq planını ikidəfə nəzərəalma üsulu ilə tərtib edək. Bu məqsədlə cədvəl 8.7 – də * və ** işarələri qeyd olunmuş xanalar təyin edilir.

Əvvəlcə ** işarəsi qeyd edilmiş (1, 2), (2, 3), (3, 6) və (4, 5) xanalarında yükdaşıma həcmləri tapılır:

1) $x_{12} = \min\{220, 200\} = 200$, onda $x_{22} = x_{32} = x_{42} = 0$.

2) $x_{23} = \min\{170, 80\} = 80$, onda $x_{13} = x_{33} = x_{43} = 0$.

3) $x_{36} = \min\{240, 190\} = 190$, onda $x_{16} = x_{26} = x_{46} = 0$.

4) $x_{45} = \min\{320, 130\} = 130$, onda $x_{15} = x_{25} = x_{35} = 0$.

Daha sonra * işarəsi qeyd edilmiş, lakin hələlik doldurulmamış (2, 1) və (3, 4) xanalarında yükdaşıma həcmləri tapılır:

5) $x_{21} = \min\{90, 160\} = 90$, onda $x_{24} = 0$.

6) $x_{34} = \min\{50, 190\} = 50$, onda $x_{35} = 0$.

Minimum dəyər üsulunu tətbiq etməklə alırıq:

7) $x_{11} = \min\{20, 70\} = 20$, onda $x_{14} = 0$.

8) $x_{41} = \min\{190, 50\} = 50$.

9) $x_{44} = 140$.

Cədvəl 8.8

							Qalmış ehtiyatlar 1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
6 20	3 ** 200	10 0	8 0	12 0	7 0	220	20	20	20	20	20	20	0	0	0
5 * 90	9 0	2 ** 80	11 0	4 0	6 0	170	170	90	90	90	0	0	0	0	0
11 0	4 0	7 0	6 * 50	10 0	3 ** 190	240	240	240	50	50	50	0	0	0	0
7 50	10 0	12 0	9 140	2 ** 130	5 0	320	320	320	320	190	190	190	190	140	0
160	200	80	190	130	190	950 / 950									

Qalmış tələbatlar

160	0	80	190	130	190	1)
160	0	80	190	130	190	2)
160	0	0	190	130	0	3)
160	0	0	190	0	0	4)
70	0	0	190	0	0	5)
70	0	0	140	0	0	6)
50	0	0	140	0	0	7)
0	0	0	140	0	0	8)
0	0	0	0	0	0	9)

Beləliklə NM-in ikidəfə nəzərəalma üsulu ilə tərtib edilmiş ilkin dayaq planı aşağıdakı şəkildə olur:

Cədvəl 8.9

İstehsal məntəqələri	**İstehlak məntəqələri** 1	2	3	4	5	6	**Ehtiyatlar**
1	6 20	3 ** 200	10	8	12	7	220
2	5 90	9	2 ** 80	11	4	6	170
3	11	4	7	6 * 50	10	3 ** 190	240
4	7 50	10	12	9 140	2 ** 130	5	320
Tələbatlar	160	200	80	190	130	190	a_i / b_j

Cədvəl 8.9 - dan göründüyü kimi $x_{ij} > 0$ olan dolu xanaların sayı $N = m + n - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$ - a bərabərdir. Ona görə də tapılmış ilkin dayaq plan cırlaşmayandır.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 190 \\ 50 & 0 & 0 & 140 & 130 & 0 \end{pmatrix}$$

dayaq planma uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri isə

$$Z(X) = 6 \cdot 20 + 3 \cdot 200 + 5 \cdot 90 + 2 \cdot 80 + 6 \cdot 50 + 3 \cdot 190 +$$
$$+ 7 \cdot 50 + 9 \cdot 140 + 2 \cdot 130 = 4070.\text{олур}.$$

Qeyd 8.4. Əgər yoxlasaq alarıq ki, ikidəfə nəzərəalma üsulundan istifadə etməklə ilkin məlumatları cədvəl 8.2 – də verilmiş nəqliyyat məsələsi üçün tərtib edilmiş ilkin dayaq plan, onun minimum dəyər üsulu ilə tapılmış ilkin dayaq planı ilə üst-üstə düşür. Buna görə də biz ikidəfə nəzərəalma üsulunun tətbiqinə aid misal olaraq digər nəqliyyat məsələsinə baxmışıq.

8.5.4. Fogelin approksimasiya üsulu

Yuxarıda göstərilən üsullar ilə müqayisədə Fogelin approksimasiya üsulundan istifadə olunması elə ilkin dayaq planı qurmağa imkan verir ki, o ya NM-in optimal planına olduqca yaxın olur, ya da məsələnin optimal planı ilə üst-üstə düşür.

Fogel üsulu ilə ilkin dayaq planın tapılması prosesi də həmçinin eyni növ addımlardan (iterasiyalardan) ibarətdir. Hər bir addımda NM-in ilkin məlumatlar cədvəlinin bütün sətir və sütunlarındakı ən kiçik nəqliyyat xərcləri arasındakı fərqlər hesablanır. Alınmış fərqlər içərisində ən böyüyü tapılır və o çevrəyə alınır. Bu fərq hansı sətir yaxud sütunda alınırsa, orada ən kiçik nəqliyyat xərci müəyyən edilir və o da çevrəyə alınır. Bu xərcin daxil olduğu xanada maksimum mümkün yükdaşıma həcmi yazılır.

Daha sonra cədvəlin müvafiq əlavə ehtiyatlar sütunu və tələbatlar sətrində zəruri dəyişikliklər aparılır. Bu məqsədlə uyğun istehsal məntəqəsində qalmış məhsul ehtiyatı və istehlak məntəqəsində qalmış tələbat hesablanır. Bu üsulla alınmış nəqliyyat xərcləri arasındakı fərqlər, həmçinin məntəqələrdə qalmış məhsul ehtiyatları və tələbatlar NM-in şərtləri verilmiş cədvəl 8.10 - da onlar üçün xüsusi olaraq ayırılmış müvafiq əlavə sütun və sətirlərdə yazılır.

Qeyd edək ki, hər bir addımdan sonra, qalmış məhsul ehtiyatı sıfra bərabər olan istehsal məntəqəsi yaxud tələbatı tam ödənilmiş istehlak məntəqəsi müvəqqəti olaraq cədvəldən çıxarılır.

Əgər verilmiş sətirdəki (sütundakı) ən kiçik nəqliyyat xərci bir neçə xanalarda eyni olarsa, bu halda ən kiçik xərclər arasındakı maksimum fərqə uyğun sütunda (sətirdə) yerləşən xana doldurulur.

Beləliklə, birinci addımdan sonra növbəti, ikinci addıma keçilir.

Nəticədə $N \leq m+n-1$ sayda addım tətbiq edilməklə cədvəlin doldurulması və bununla paralel surətdə isə NM-in ilkin dayaq planının qurulması sona yetir.

Misal 8.4. Fogelin approksimasiya üsulundan istifadə etməklə, ilkin məlumatları cədvəl 8.2 - də göstərilmiş nəqliyyat məsələsinin ilkin dayaq planını qurun.

Həlli

Birinci addımda cədvəlin bütün sətir və sütunları üzrə ən kiçik nəqliyyat xərcləri arasındakı fərqləri tapırıq. Məsələn, birinci sətir üzrə ən kiçik nəqliyyat xərcləri $c_{12}=6$ və $c_{15}=8$, onların fərqi isə

$$c_{15}-c_{12}=8-6=2 \quad \text{olur.}$$

Oxşar qayda ilə birinci sütun üzrə ən kiçik nəqliyyat xərcləri $c_{11} = 9$ və $c_{31} = 6$, onların fərqi isə

$$c_{11} - c_{31} = 9 - 6 = 3 \quad \text{olur və s.}$$

Nəqliyyat xərclərinin alınmış fərqlirini cədvəl 8.10 - un uyğun sütun və sətrində yazırıq. Bütün fərqlərin içərisində ən böyüyü 5-ə bərabərdir ki, bu da üçüncü və dördüncü istehlak məntəqələri üzrə eynidir. Ona görə də üçüncü və dördüncü sütunlarda ən kiçik nəqliyyat xərcləri $c_{23} = 9$ və $c_{24} = 5$ tapılır. Onlar müvafiq olaraq (2,3) və (2,4) xanalarında olmaqla eyni bir sətirdə (ikinci istehsal məntəqəsi) yerləşirlər. Bununla bərabər xanalardan hər hansı biri doldurulmaq üçün seçilə bilər. Misal üçün (2,4) xanasını götürək. Buradakı maksimum mümkün yükdaşıma həcmi aşağıdakı kimi təyin edilir: 1) $x_{24} = \min\{a_2, b_4\} = \min\{250, 90\} = 90$.

Beləliklə, dördüncü istehsal məntəqəsindəki tələbat tam ödənilir, onda

$$x_{14} = 0, x_{34} = 0 \quad \text{yaxud} \quad x_{14} = x_{34} = 0.$$

İkinci istehsal məntəqəsində qalmış məhsul ehtiyatı isə aşağıdakı fərqlə hesablanır :

$$\Delta a_2 = a_2 - b_4 = 250 - 90 = 160.$$

Daha sonra ikinci addım tətbiq edilir. Burada ən kiçik xərclər arasında alınmış fərqlər, həmçinin zəruri dəyişikliklər nəzərə alınmaqla qalmış ehtiyatlar və tələbatlar cədvəl 8.10 - un müvafiq əlavə sütunu və sətrində yazılır və s.

Beləliklə, ardıcıl olaraq aşağıdakı hesablamalar yerinə yetitrilir.

2) $x_{23} = \min\{160, 105\} = 105$, onda $x_{13} = x_{33} = 0$.

3) $x_{22} = \min\{55, 180\} = 55$, onda $x_{21} = x_{25} = 0$.

4) $x_{31} = \min\{150, 120\} = 120$, onda $x_{11} = 0$.

5) $x_{12} = \min\{200, 125\} = 125$, onda $x_{32} = 0$.

6) $x_{35} = \min\{30, 105\} = 30$.

7) $x_{15} = 75$.

Cədvəl 8.10

Xərclər arasındakı fərqlər və qalmış ehtiyatlar

							1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
9 0	6 125	17 0	11 0	8 75	200	2	2 200	2 200	2 200	2 200	0 75	0 75	- 0
13 0	4 55	9 105	5 90	7 0	250	1	3 160	3 55	- 0	- 0	- 0	- 0	- 0
6 120	7 0	14 0	10 0	6 30	150	1	1 150	1 150	1 150	1 30	1 30	- 0	- 0
120	180	105	90	105	600 600								
3	2	5	5	1									
3 120	2 180	5 105	- 0	1 105	1)								
2 120	2 180	- 0	- 0	1 105	2								
3 120	1 125	- 0	- 0	1 105	3)								
- 0	1 125	- 0	- 0	2 105	4)								
- 0	- 0	- 0	- 0	2 105	5)								
- 0	- 0	- 0	- 0	0 75	6)								
- 0	- 0	- 0	- 0	- 0	7)								

Xərclər arasındakı fərqlər və qalmış tələbatlar

Nəhayət, Fogelin approksimasiya üsulu ilə qurulmuş ilkin dayaq plan aşağıdakı kimi olur.

Cədvəl 8.11

9	6 125	17	11	8 75	200
13	4 55	9 105	5 90	7	250
6 120	7	14	10	6 30	150
120	180	105	90	105	600 600

Dayaq planın düzgün qurulub-qurulmadığını yoxlayaq. Buradakı dolu xanaların sayı $N = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ - dən çox ola bilməz. Doğrudan da cədvəl 8.11 - dən $x_{ij} > 0$ yükdaşımalarla doldurulmuş xanaların sayı yeddiyə hərabərdir, yəni tapılmış dayaq plan cırlaşmayandır.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 125 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 55 & 105 & 90 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

ilkin dayaq planına uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri isə $Z = 6 \cdot 125 + 8 \cdot 75 + 4 \cdot 55 + 9 \cdot 105 + 5 \cdot 90 + 6 \cdot 120 + 6 \cdot 30 = 3865$ təşkil edir.

Sonradan göstərəcəyik ki, tapılmış dayaq plan cədvəl 8.2-də verilmiş nəqliyat məsələsinin həm də optimal planıdır və deməli, $Z_{\min} = 3865$.

8.6. NM – in həlli üsulları

(8.1) – (8.4) NM - in qoyuluşundan göründüyü kimi, o, XP məsələsidir və simpleks üsulu ilə həll edilə bilər.

Bununla bərabər NM - in məhdudiyyət şərtləri aşağıdakı özünəməxsus xüsusiyyətlərə malikdir:

a) məhdudiyyət şərtləri tənliklərdən ibarətdir;

b) hər bir dəyişən yalnız iki tənliyə daxildir;

v) dəyişənlərin əmsalları vahidə bərabərdir.

Bu xarakterik xüsusiyyətlər və NM - in mühüm praktiki əhəmiyyəti nəzərə alınmaqla onun həlli üçün xüsusi üsullar işlənib hazırlanmışdır. Onlara misal olaraq « potensiallar üsulu» və « paylama üsulu » - nu göstərmək olar.

Qeyd edək ki, hər iki üsul ilə NM - in həllinin ümumi prinsipi XP məsələsinin simpleks üsulu ilə həlli prinsipinə oxşardır. Belə ki, burada da əvvəlcə NM - in hər hansı ilkin dayaq planı tapılır, sonra isə o ardıcıl surətdə yaxşılaşdırılır və nəticədə optimal plan alınır.

8.6.1. Potensiallar üsulu

Teorem 8.2. **NM-in $X = (x_{ij})_{m,n}$ planının optimal olması üçün zəruri və kafi şərt ona (m+n) sayda $u_1, u_2, ..., u_m$; $v_1, v_2, ..., v_n$ ədədlərindən ibarət elə sistemin uyğun olmasıdır ki, onlar üçün aşağıdakı potensiallıq şərtləri ödənsin:**

$$v_j - u_i = c_{ij},\ x_{ij} > 0 \text{ olduqda;}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij},\ x_{ij} = 0 \text{ olduqda.}$$

Burada u_i və v_j ədədləri müvafiq olaraq istehsal və istehlak məntəqələrinin potensialları adlanır.

İqtisadi nöqteyi nəzərdən u_i və v_j şərti olaraq uyğun istehsalçı və istehlakçıda məhsul vahidinin dəyərləri kimi də götürülə bilərlər. Ən sadə halda istehlakçıda məhsulun dəyəri bərabərdir onun istehsalçıdakı dəyəri üstəgəl onun daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri, daha doğrusu alırıq:

$$v_j = u_i + c_{ij}.$$

NM-in potensiallar üsulu ilə həlli prosesi iki addımdan ibarətdir: ilkin addım və ümumi (təkrarlanan) addım.

İlkin addım aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir:

1. Dayaq planın tapılması. Bu məqsədlə aşağıdakı üsullardan biri istifadə oluna bilər:

- şimal - qərb bucaq üsulu (yaxud diaqonal üsulu) ;
- ən kiçik element üsulu (yaxud ən kiçik dəyər üsulu) ;
- iki dəfə nəzərəalma üsulu ;
- Fogelin approksimasiya üsulu.

II. $u_1, u_2, ..., u_m$; $v_1, v_2, ..., v_n$ potensiallarının qiymətlərinin təyini.

Əgər dayaq planda $x_{ij} > 0$ ilə doldurulmuş xanaların sayı $N = m + n - 1$ olarsa, onda o çırlaşmayandır və potensiallar isə aşağıdakı tənliklər sisteminin həlli nəticəsində təyin edilir:

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad \text{bütün } x_{ij} > 0 \text{ - lar üçün.} \qquad (8.24)$$

Qeyd 8.5. Dolu xanaların sayı $(m + n - 1)$ olduğu üçün (8.24) sistemi də $(m + n - 1)$ tənlikdən ibarətdir. Buradakı məchulların sayı isə $(m + n)$ – ə bərabərdir və deməli, tənliklərin sayından bir vahid çoxdur. Ona görə də məchullardan hər hansı birinə ixtiyari qiymət verilir (məsələn, $u_1 = 0$) və yerdə qalan u_i, v_j məchulları (8.24) tənliklər sistemindən ardıcıl olaraq təyin edilirlər.

Qeyd 8.6. Əgər $N < m + n - 1$ olarsa, onda dayaq plan cırlaşandır və bu zaman $x_{ij} = 0$ yükdaşımaya malik olan $(m + n - 1 - N)$ sayda əlavə xanaları plana daxil etmək lazımdır. Burada yeni xanalar elə seçilməlidir ki, nəticədə bütün xanalar yığımında heç bir dövr qurmaq mümkün olmasın.

III. Dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

Cədvəlin boş xanaları üzrə $v_j - u_i \le c_{ij}$ şərtləri yoxlanır.

Əgər onlar ödənirsə, deməli tapılmış ilkin dayaq plan NM-in həm də optimal planıdır və məsələ həll edilmişdir. Əks halda isə ilkin dayaq plan optimal deyildir.

Əgər $X = (x_{ij})_{m,n}$ ilkin dayaq planı optimal deyildirsə, onda ***ümumi addıma*** keçirik. O aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir:

I. Dayaq planın yaxşılaşdırılması.

Tutaq ki,

$$\alpha_{kl} = \max \alpha_{ij} = \max\{v_j - u_i - c_{ij} > 0\}.$$

Deməli, (k, l) xanasında yükdaşıma olmalıdır. Bu məqsədlə (k, l) xanasından başlamaqla saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətində yeganə dövr qurulur. Onun təpə nöqtələrinin yerləşdiyi xanalar ardıcıl olaraq «+» və «-» ilə işarə edilir. Bunlar müvafiq olaraq müsbət və mənfi xanalar adlanır.

Tərif 8.5. **Təpə nöqtələrindən biri dolu olmayan, digər yerdə qalanları isə dolu xanalarda yerləşən, tərəfləri üfüqi və şaquli düz xətt parçalarından ibarət olan qapalı (ümumiyyətlə desək, qabarıq olmayan) çoxbucaqlıya dövr deyilir.**

Mənfi xanalarda olan ən kiçik yükdaşıma həcmi müəyyən edilir. O, müsbət xanalardakı həcmlərə əlavə olunur və mənfi xanalardakı həcmlərdən çıxılır.

Nəticədə (k, l) xanasında yükdaşıma əldə edilir, lakin ən kiçik həcmə malik mənfi xana boş qalır.

Yeni daxil edilmiş xana və qurulmuş dövrlə əlaqədar xanalar arasında yüklərin bölüşdürülməsi NM-in yeni dayaq planını təyin etməyə imkan verir:

$$X`=(x`_{ij})_{m,n}$$

Bu ilkin $X=(x_{ij})_{m,n}$ dayaq planı ilə müqayisədə yaxşılaşdırılmış olur.

II. Yeni dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

Bu məqsədlə ilkin addımın II və III mərhələləri təkrarən tətbiq edilir. Ümumi addımın ardıcıl olaraq tətbiqi isə NM-in optimal planının tapılmasına qədər davam etdirilir.

8.6.2. NM – in potensiallar üsulu ilə həllinə aid misal

Məsələ. **Aşağıdakı məlumatlar verilir:**
Məhsul ehtiyatları $a_1=200,\ a_2=250,\ a_3=150.$
Məhsula olan tələbatlar $b_1=120,\ b_2=180,\ b_3=105,\ b_4=90,\ b_5=105.$

Məhsul vahidinin daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri

$$\left(c_{ij}\right)_{3,5}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 17 & 11 & 8\\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7\\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6\end{pmatrix}.$$

Verilmiş məlumatlar əsasında:

1) **Nəqliyyat məsələsinin şərtlərini vahid cədvəl şəklində göstərin.**
2) **Onun iqtisadi-riyazi modelini qurun.**
3) **İstehsal və istehlak məntəqələri arasında minimum ümumi nəqliyyat xərclərini tə'min edən optimal yükdaşıma planı tərtib edin.**

Həlli

1) Məsələnin cədvəl şəkilində göstərilməsi.

Cədvəl 8.12

İstehsal məntə-qələri	İstehlak məntəqələri					Ehtiyat-lar
	1	2	3	4	5	
1	9 x_{11}	6 x_{12}	17 x_{13}	11 x_{14}	8 x_{15}	200
2	13 x_{21}	4 x_{22}	9 x_{23}	5 x_{24}	7 x_{25}	250
3	6 x_{31}	7 x_{32}	14 x_{33}	10 x_{34}	6 x_{35}	150
Tələbat - lar	120	180	105	90	105	600 / 600

2) Məsələnin iqtisadi-riyazi modeli.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x)=9x_{11}+6x_{12}+17x_{13}+11x_{14}+8x_{15}+13x_{21}+4x_{22}+9x_{23}+5x_{24} + 7x_{25}+6x_{31}+7x_{32}+14x_{33}+10x_{34}+6x_{35} \to \min \quad (8.25)$$

Məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=200, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=250, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=150 \end{cases} \quad (8.26)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{33}=120, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=180, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=105, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=90, \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}=105 \end{cases} \quad (8.27)$$

$$x_{ij} \geq 0; \qquad (i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4,5). \quad (8.28)$$

İlkin addım.

I. Dayaq planın tapılması.

Tutaq ki, şimal – qərb bucaq üsulu tətbiq edilmiş və ilkin dayaq plan cədvəl 8.13 şəklində alınmışdır. Cədvələ həmçinin v_i və u_i potensiallarının qiymətlərini yazmaq üçün müvafiq sətir və sytun əlavə edilmişdir.

Cədvəl 8.13 - dən göründüyü kimi x_{ij} > 0 - a malik dolu xanaların sayı

$$N = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$$

olduğundan ilkin dayaq plan cırlaşmayandır.

Cədvəl 8.13

u_i \ v_j	$v_1=9$	$v_2=6$	$v_3=11$	$v_4=7$	$v_5=3$
$u_1=0$	9 - 120	6 + 80	17	11	8
$u_2=2$	13	4 - 100	9 105	5 + 45	7
$u_3=-3$	6 +	7	14	10 - 45	6 105

$$X^1=\begin{pmatrix}120 & 80 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 100 & 105 & 45 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 45 & 105\end{pmatrix}$$

dayaq planında ümumi nəqliyyat xərclərini hesablayaq:

$$Z_1=Z(X^1)=9\cdot120+6\cdot80+4\cdot100+9\cdot105+5\cdot45+10\cdot45+6\cdot105=4210$$

$$Z_1=4210.$$

II. Potensilların qiymətlərinin təyini.

$v_j-u_i=c_{ij}$ Tutaq ki, $u_1=0$, onda alırıq:

$$\begin{cases} v_1-u_1=9, \\ v_2-u_1=6, \\ v_2-u_2=4, \\ v_3-u_2=9, \\ v_4-u_2=5, \\ v_4-u_3=10, \\ v_5-u_3=6 \end{cases} \qquad \begin{aligned} v_1&=9,\\ v_2&=6,\\ u_2&=2,\\ v_3&=11,\\ v_4&=7,\\ u_3&=-3,\\ v_5&=3\end{aligned}$$

Potensialların alınmış qiymətlərini cədvəl 8.13 - də müvafiq sətir və sütunda yerinə yazırıq.

III. Dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

$$v_j - u_i \le c_{ij},$$

$$v_3 - u_1 = 11 < 17 = c_{13},$$

$$v_4 - u_1 = 7 < 11 = c_{14},$$

$$v_5 - u_1 = 3 < 8 = c_{15},$$

$$v_1 - u_2 = 7 < 13 = c_{21},$$

$$v_5 - u_2 = 1 < 7 = c_{25},$$

$$v_1 - u_3 = 12 > 6 = c_{31}, \quad 6$$

$$v_2 - u_3 = 9 > 7 = c_{32}, \quad 2$$

$$v_3 - u_3 = 14 = 14 = c_{33}$$

$v_j - u_i \le c_{ij}$ potensiallıq şərtləri bütün boş xanalar üzrə ödənilmədiyi üçün tapılmış ilkin dayaq plan optimal deyildir. Onu yaxşılaşdırmaq məqsodi ilə ümumi addıma keçirik.

Birinci ümumi addım.
I. Dayaq planın yaxşılaşdırılması.

$$\alpha_{31} = \max\{v_j - u_i - c_{ij} > 0\} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6$$

olduğundan (3;1) xanasını plana daxil etmək lazımdır. Ona görə də (3;1) xanasından başlamaqla dövr qurulur.

$$\min\{45;100;120\} = 45.$$

Yükdaşıma həcmlərinin yenidən bölüşdürülməsi nəticəsində növbəti dayaq planı alırıq (bax cədvəl 8.14).

Cədvəl 8.14

u_i \ v_j	$v_1=9$	$v_2=6$	$v_3=11$	$v_4=7$	$v_5=9$
$u_1=0$	9 − 75	6 125	17	11	8 +
$u_2=2$	13	4 55	9 105	5 90	7
$u_3=3$	6 + 45	7	14	10	6 − 105

$$X^2=\begin{pmatrix} 75 & 125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 105 & 90 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}$$

İkinci dayaq plana uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri

$$Z_2=Z(X^2)=9\cdot75+6\cdot125+4\cdot55+9\cdot105+5\cdot90+6\cdot45+6\cdot105=3940$$

yəni $Z_2=3940$ olur.

$Z_2<Z_1$ ödənildiyindən, X^2 dayaq planı X^1 ilə müqayisədə yaxşı hesab edilir.

II. Potensialların qiymətlərinin təyini.

$v_j-u_i=c_{ij}$ Tutaq ki, $u_1=0$, onda alırıq:

$$\begin{cases} v_1 - u_1 = 9, \\ v_2 - u_1 = 6, \\ v_2 - u_2 = 4, \\ v_3 - u_2 = 9, \\ v_4 - u_2 = 5, \\ v_1 - u_3 = 6, \\ v_5 - u_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{aligned} v_1 &= 9, \\ v_2 &= 6, \\ u_2 &= 2, \\ v_3 &= 11, \\ v_4 &= 7, \\ u_3 &= 3, \\ v_5 &= 9 \end{aligned}$$

Potensialların qiymətləri cədvəl 8.14 - də yerinə yazılır.

III. Dayaq planın optimal olmasının yoxlanması

$$v_j - u_i \le c_{ij},$$

$$v_3 - u_i = 11 < 17 = c_{13},$$

$$v_4 - u_i = 7 < 11 = c_{14}, \qquad 1$$

$$v_5 - u_i = 9 > 8 = c_{15},$$

$$v_1 - u_2 = 7 < 13 = c_{21},$$

$$v_5 - u_2 = 7 = 7 = c_{25},$$

$$v_2 - u_3 = 3 < 7 = c_{32},$$

$$v_3 - u_3 = 8 < 14 = c_{33},$$

$$v_4 - u_3 = 4 < 10 = c_{31}$$

Alırıq ki, X^2 optimal plan deyildir.

İkinci ümumi addım.

1. Dayaq planın yaxşılaşdırılması.

$\alpha_{15} = v_5 - u_1 - c_{15} = 1 > 0$ olduğundan (1; 5) xanası plana daxil edilir.

(1; 5) xanasından başlamaqla dövr qurulur.

$$\min\{75;105\}=75.$$

Yükdaşıma həcmlərinin yenidən bölüşdürülməsi nəticəsində üçüncü dayaq planı tapırıq (bax cədvəl 8.15).

Cədvəl 8.15

v_j / u_i	$v_1=8$	$v_2=6$	$v_3=11$	$v_4=7$	$v_5=8$
$u_1=0$	9	6 125	17	11	8 75
$u_2=2$	13	4 55	9 105	5 90	7
$u_3=2$	6 120	7	14	10	6 30

$$X^3=\begin{pmatrix} 0 & 125 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 55 & 105 & 90 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Üçüncü dayaq plana uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri

$$Z_3=Z(X^3)=6\cdot125+8\cdot75+4\cdot55+9\cdot105+5\cdot90+6\cdot120+6\cdot30=3865$$

yəni $Z_3=3865$ olur.

$Z_3<Z_2<Z_1$ ödənildiyi üçün, X^3 dayaq planı X^2 ilə müqayisədə yaxşıdır.

II. Potensialların qiymətlərinin təyini.

$v_j-u_i=c_{ij}$ Tutaq ki, $u_1=0$, onda alırıq:

$$\begin{cases} v_2 - u_1 = 6, \\ v_5 - u_1 = 8, \\ v_2 - u_2 = 4, \\ v_3 - u_2 = 9, \\ v_4 - u_2 = 5, \\ v_1 - u_3 = 6, \\ v_5 - u_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} v_2 = 6, \\ v_5 = 8, \\ u_2 = 2, \\ v_3 = 11, \\ v_4 = 7, \\ u_3 = 2, \\ v_1 = 8 \end{array}$$

Potensialların qiymətləri cədvəl 8.15 - ə daxil edilir.

III. Dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

Asanlıqla göstərmək olar ki, cədvəl 8.15 - də olan bütün boş xanalar üzrə $v_j - u_i \le c_{ij}$ potensiallıq (optimallıq) şərtləri ödənilir. Deməli, X^3 üçüncü dayaq planı NM - in həm də optimal planıdır.

Onda alırıq:

$$Z_{\min} = Z_3 = Z(X^3) = 3865.$$

Cavab: ***Optimal yükdaşıma planı :***

$x_{12} = 125, x_{15} = 75, x_{22} = 55, x_{23} = 105,$

$x_{24} = 90, x_{31} = 120, x_{35} = 30.$

Optimal plana uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri:

$Z_{\min} = 3865$ ***təşkil edir.***

8.6.3. Paylama üsulu

Paylama üsulu NM-in həlli üçün tətbiq edilən ən sadə üsullardan biridir. Onun mahiyyətinin izahına keçməmişdən əvvəl «boş xananın qiyməti» yaxud «dövrün qiyməti» anlayışını daxil edək.

Tutaq ki, verilmiş NM-in X^1 ilkin dayaq planı tapılmışdır və bu plana uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri isə $Z(x^1)$ təşkil edir. Əgər NM-in cədvəlində ixtiyari boş xana götürsək və onu «+» ilə işarə etsək, onda bu xananı və dayaq plana daxil olan müəyyən sayda dolu xanaları özündə saxlayan yeganə dövr qurmaq mümkündür. Bu zaman dövrə daxil olan digər xanalar ardıcıl olaraq «-» və «+» ilə işarə edilir. **Bu yenidən hesablama dövrü adlanır.** Dövrü qurduqdan sonra «-» xanalarda ən kiçik yükdaşıma həcmi tapılır. Tutaq ki,

$$d_1 = \min_{"-"} \{X^1_{ij}\}.$$

Daha sonra d_1 dövrün «+» xanalarında olan məhsul miqdarlarına əlavə edilir və «-» xanalarda olan məhsul miqdarlarından isə çıxılır. Yükləri yenidən paylamaqla yeni X^2 dayaq planı tapılır. Fərz edək ki, plana (k,l), yəni $(i=k,\ j=l)$ boş xanasını daxil etmək lazımdır. Onda yük vahidinin dövr üzrə yenidən paylanması məqsəd funksiyasının $Z(X^1)$ qiymətində müvafiq meylə səbəb olacaqdır ki, bu da

$$\Delta^1_{(k,l)} = \sum_{"+"} c_{ij} - \sum_{"-"} c_{ij} \qquad (8.29)$$

fərqi ilə təyin edilir.

Burada $\sum_{"+"} c_{ij}$ - dövrün «+» xanaları üzrə yük vahidlərinin daşınması nəqliyyat xərclərinin cəmi, $\sum_{"-"} c_{ij}$ - isə «-» xanalar üzrə müvafiq xərclərin cəmidir.

II. İlkin dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

Bunun üçün dayaq plana daxil olan boş xanaların $\Delta^1_{(i,j)}$ qiymətləri, ilk mənfi qiymətə malik xana tapılana kimi, ardıcıl olaraq hesablanır. Bu zaman xanaların qiymətlərinin hesablanmasını c_{ij} nəqliyyat xərclərinin artması nəzərə alınmaqla yerinə yetirmək məqsədəuyğundur. Belə ki, verilmiş məsələdə $Z(X)$ məqsəd funksiyası üçün minimum qiymət axtarılır. Nəticədə aşağıdakı iki haldan biri alına bilər:

1-ci hal. Bütün boş xanaların qiymətləri mənfi deyildir, yəni ixtiyari $X^1_{ij} = 0$ üçün $\Delta^1_{(i,j)} \geq 0$ şərti ödənir.

Onda tapılmış X^1 ilkin dayaq planı həm də optimaldır və $Z_{\min} = Z(X^1)$, deməli NM həll edilmişdir.

2-ci hal. İlkin dayaq planda $\Delta^1_{(k,l)} < 0$ mənfi qiymətinə (k,l) boş xanası mövcuddur.

Onda $X^1 = (x^1_{ij})_{m,n}$ dayaq planı optimal deyildir və onu yaxşılaşdırmaq lazımdır. Bu məqsədlə ümumi addıma keçilir.

Ümumi addım aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir:

I. Dayaq planın yaxşılaşdırılması.

(k,l) xanasında «+» işarəsi qeyd olunur və buradan başlamaqla saat əqrəbinin əksi istiqamətində yenidən hesablama dövrü qurulur. Yenidən paylanan yükün d_1 həcmi dövrün «-» xanalarında olan ən kiçik yükdaşıma həcminə bərabər götürülür. Bundan sonra «+» xanalarda olan yükdaşıma həcmləri d_1 qədər artırılır, «-» xanalarda isə əksinə, d_1 qədər azaldılır. Nəticədə dövrün xanalarından birində daşıma həcmi sıfra bərabər olduğu üçün boş, digər xanalar isə dolu olur. Beləliklə, yeni $X^2 = (x^2_{ij})_{m,n}$ dayaq planı alınır.

II. Yeni dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

X^2 dayaq planına nəzərən ilkin addımın II mərhələsi tətbiq edilir və s.

Zəruri olduqda ümumi addımın ardıcıl olaraq tətbiqi NM-in optimal planı tapılana kimi davam etdirilir.

Qeyd 8.7. NM - in həlli zamanı aşağıdakı xüsusi hallar alına bilər:

1. Yenidən hesablama dövrünün xanalarından hər hansı birində yükdaşıma həcmi sıfra bərabər ola bilər. Bu halda dövrə uyğun boş xanada sıfır yükdaşıma həcmi yazılır, verilmiş «-» xana isə boş xanaya çevrilir.
2. Dövr üzrə yüklərin yenidən paylanması bir xanada deyil, bir neçə xanada yükdaşıma həcmlərinin sıfra çevrilməsinə səbəb olur. Bu halda xanalardan hər hansı biri boş, yerdə qalanlar isə sıfır yükdaşıma həcmləri ilə doldurulmuş hesab edilir.

8.6.4. NM – in paylama üsulu ilə həllinə aid misal

Məsələ. İlkin məlumatları cədvəl 8.2 - də verilmiş nəqliyyat məsələsini paylama üsulu ilə həll edin.

Həlli

İlkin addım. I. İlkin dayaq planın tapılması.

Tutaq ki, minimum dəyər üsulundan istifadə edilmiş və ilkin dayaq plan tapılmışdır.

Cədvəl 8.16

9	6 +	17 / 105	11 / 20	8 - / 75	200
13	4 - / 180	9	5 / 70	7 +	250
6 / 120	7	14	10	6 / 30	150
120	180	105	90	105	a_i / b_j

$x_{ij} > 0$ ilə dolu olan xanaların sayı

$$N = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$$

təşkil edir və ona görə də

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 105 & 20 & 75 \\ 0 & 180 & 0 & 70 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

ilkin dayaq planı cırlaşmayandır. Bu plana uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri isə

$$Z(X^1)=17\cdot105+11\cdot20+8\cdot75+4\cdot180+5\cdot70+6\cdot120+6\cdot30=4575.$$

II. İlkin dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

Nəqliyyat xərclərinin artması nəzərə alınmaqla

$$(6 < 7 = 7 < 9 = 9 < 10 < 13 < 14)$$

X^1 dayaq planında boş xanaların ardıcıllığı

(1,2), (1,4), (3,2), (1,1), (2,3), (1,4), (2,1), (3,3)

şəklində çıxış edir.

Buna görə də (1,2) xanasından başlamaqla, ilk mənfi qiymətə malik xana tapılana kimi, ardıcıl olaraq boş xanaların qiymətlərinin hesablanması davam etdirilir.

$\Delta^1_{(1,2)} = 6 + 5 - (4 + 11) = -4 < 0$ olduğundan, (1,2) ilk mənfi qiymətə malik olan boş xana olur. Deməli, X^1 ilkin dayaq planı optimal deyildir.

Birinci ümumi addım.

I. İlkin dayaq planın yaxşılaşdırılması.

(1,2) xanasından başlamaqla (1,2), (2,2), (2,4), (1,4) yenidən hesablama dövrü qurulur. Daha sonra yenidən paylama üçün lazım olan yükün həcmi

$$d_1 = \min\{180; 20\} = 20$$

təyin edilir.

Ümumi nəqliyyat xərclərinə edilən müvafiq qənaət isə aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\Delta Z^1_{(1,2)} = \Delta^1_{(1,2)} \cdot d_1 = -4 \cdot 20 = -80 .$$

Doğrudan da $d_1 = 20$ yükdaşıma həcmini dövr üzrə yenidən paylasaq yeni dayaq planı taparıq

Cədvəl 8.17

9	6 + 20	17 - 105	11	8 75	200
13	4 - 160	9 +	5 90	7	250
6 120	7	14	10	6 30	150
120	180	105	90	105	a_i / b_j

Buradan

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 105 & 0 & 75 \\ 0 & 160 & 0 & 90 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

dayaq planına uyğun ümumi nəqliyyat xərclərini

$$Z(X^2) = 6\cdot 20 + 17\cdot 105 + 8\cdot 75 + 4\cdot 160 + 5\cdot 90 + 6\cdot 120 + 6\cdot 30 = 4495$$

və $\Delta Z^1_{(1,2)} = Z(X^2) - Z(X^1) = 4495 - 4575 = -80$ alırıq.

$Z(X^2) < Z(X^1)$ olduğundan, yeni X^2 dayaq planı X^1 ilə müqayisədə yaxşılaşdırılmış olur.

II. Yeni dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

Cədvəl 8.17 – dən göründüyü kimi X^2 üçün uyğun olaraq alırıq:

$$7 = 7 < 9 = 9 < 10 < 11 < 13 < 14 ;$$

(2,5), (3,2), (1,1), (2,3), (3,4), (1,4), (2,1), (3,3).

1) (2,5) boş xanasından başlamaqla (2,5), (1,5), (1,2), (2,2) yenidən hesablama dövrü qurulur və (2,5) xanasının qiymәti hesablanır.

$\Delta^2_{(2,5)} = 7 + 6 - (8 + 4) = 1 > 0$ olduğundan növbəti (3,2) boş xanasına keçirik və s.

2) (3,2) xanası üçün:
(3,2), (3,5), (1,5), (1,2),
$\Delta^2_{(3,2)} = 7 + 8 - (6 + 6) = 3 > 0$.

3) (1,1) xanası üçün:
(1,1), (3,1), (3,5), (1,5),
$\Delta^2_{(1,1)} = 9 + 6 - (6 + 8) = 1 > 0$.

4) (2,3) xanası üçün:
(2,3), (1,3), (1,2), (2,2),
$\Delta^2_{(2,3)} = 9 + 6 - (17 + 4) = -6 < 0$.

$\Delta^2_{(2,3)} = -6 < 0$ olduğundan onda tapılmış yeni X^2 dayaq planı da həmçinin optimal deyildir.

İkinci ümumi addım.

I. Dayaq planın yaxşılaşdırılması.

(2,3) boş xanasından başlamaqla (2,3), (1,3), (1,2), (2,2) yenidən hesablama dövrü qurulur.

Yenidən paylanan yükün həcmi isə

$d_2 = \min\{105; 160\} = 105$ olur.

Ümumi nəqliyyat xərclərinə edilmiş qənaət

$\Delta Z^2_{(2,3)} = \Delta^2_{(2,3)} \cdot d_2 = -6 \cdot 105 = -630$.

təşkil edir.

Beləliklə, növbəti yeni dayaq planı aşağıdakı şəkildə alırıq:

Cədvəl 8.18

9	6 125	17	11	8 75	200
13	4 55	9 105	5 90	7	250
6 120	7	14	10	6 30	150
120	180	105	90	105	b_j \ a_i

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 125 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 55 & 105 & 90 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

dayaq planına uyğun ümumi nəqliyyat xərcləri

$Z(X^3) = 6\cdot125 + 8\cdot75 + 4\cdot55 + 9\cdot105 + 5\cdot90 + 6\cdot120 + 6\cdot30 = 3865$

$\Delta Z^2_{(2,3)} = Z(X^3) - Z(X^2) = 3865 - 4495 = -630$ olur.

$Z(X^3) < Z(X^2) < Z(X^1)$ ödənildiyi üçün X^2 ilə müqayisədə $X^3 = (x^3_{ij})_{3,5}$ dayaq planı yaxşılaşdırılmış olur.

II. Dayaq planın optimal olmasının yoxlanması.

Cədvəl 8.18 - dən göründüyü kimi asanlıqla göstərmək olar ki, X^3 dayaq planında bütün boş xanaların qiymətləri müsbətdirlər, yəni ixtiyari $x^3_{ij} = 0$ üçün $\Delta^3_{(i,j)} \geq 0$ şərti ödənir.

Deməli, bütün $\Delta Z^3_{(i,j)} \geq 0$ olur və buna görə də X^3 dayaq planı NM-in həm də optimal planıdır. Bununla da məsələ həll edilmiş olur.

Cavab: ***Optimal yükdaşıma planı -***

$x_{12} = 125, x_{15} = 75,\ x_{22} = 55,\ x_{23} = 105,$

$x_{24} = 90,\ x_{31} = 120, x_{35} = 30.$

Minimum ümumi nəqliyyat xərcləri –

$Z_{\min} = Z(x^3) = 3865.$

Mövzu 9. QEYRİ – XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA

9.1. Qeyri – xətti proqramlaşdırmanın ümumi məsələsinin qoyuluşu

Tərif 9.1. Aşağıdakı şəkildə verilmiş riyazi proqramlaşdırma məsələsinə qeyri - xətti proqramlaşdırmanın (QXP) ümumi məsələsi deyilir :

Məqsəd funksiyası

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max(\min); \qquad (9.1)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le a_i; \qquad (i = \overline{1,k}) \qquad (9.2)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i; \qquad (i = \overline{k+1, m}) \qquad (9.3)$$

Burada Z və g_i – mə'lum funksiyalardır və onlardan heç olmazsa biri hər hansı məchula nəzərən qeyri-xəttidir. a_i – verilmiş ədədlərdir.

Qeyd. Əgər məchulların mənfi olmaması şərtləri vardırsa, fərz edilir ki, onlar da (9.2) və (9.3) sistemlərinə daxildir. Bununla bərabər məchulların mənfi olmaması şərtləri bilavasitə ayrılıqda da verilə bilər.

***Tərif 9.2.* XP məsələsində olduğu kimi, burada da (9.2) və (9.3) şərtlərini ödəyən $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektoruna (9.1) - (9.3) QXP məsələsinin *mümkün həlli (planı)* deyilir.**

***Tərif 9.3.* İstənilən $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mümkün həlli üçün $Z(X^*) \ge Z(X), [Z(X^*) \le Z(X)]$ bərabərsizliyi ödənirsə, onda $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ vektoruna (9.1) - (9.3) QXP məsələsinin *optimal həlli (planı)* deyilir.**

Bu zaman X^* həmçinin ***qlobal ekstremum*** olur.

XP məsələləri ilə müqayisədə QXP məsələlərinin həlli prosesini nəzərə çarpacaq dərəcədə mürəkkəbləşdirən aşağıdakı ***xassələr*** mövcuddur:

1. QXP məsələsinin mümkün həllər çoxluğu olduqca mürəkkəb quruluşa malik ola bilər. Məsələn, o qabarıq çoxluq olmaya da bilər.

2. Qlobal maksimum (minimum) mümkün həllər oblastının həm daxilində, həm də sərhədində alına bilər. Burada o, ümumiyyətlə desək, lokal ekstremumlardan heç biri ilə üst-üstə düşməyəcəkdir.

3. $Z(X)$ məqsəd funksiyası differensiallanan olmaya da bilər və bu zaman riyazi analizin klassik üsullarının tətbiq edilməsi çətinləşir.

Göstərilən amillər nəzərə alınmaqla QXP məsələləri olduqca müxtəlif olur ki, onlar üçün də ümumi həll üsulu yoxdur.

9.2. QXP məsələsinin həlli üçün Laqranj vuruqları üsulu

Qeyri-xətti proqramlaşdırma nəzəriyyəsinin praktiki tətbiqi zamanı çox vaxt elə hallara təsadüf edilir ki, məsələnin riyazi qoyuluşunda verilmiş məhdudiyyət şərtləri bərabərliklərdən (tənliklərdən) ibarət olur, məchulların işarələri üzərinə isə heç bir şərt qoyulmur. Bununla bərabər $Z(X)$ və $g_i(X)$ öz törəmələri ilə birlikdə kəsilməz funksiyalar olurlar, yəni alırıq:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min); \tag{9.4}$$

Məhdudiyyət şərtləri

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i; \qquad (i = \overline{1, m}) \tag{9.5}$$

Tərif 1. (9.4) , (9.5)- ə şərti ekstremum məsələsi yaxud klassik optimallaşdırma məsələsi deyilir.

Bu məsələnin həlli üçün ən əlverişli üsul «*Laqranj vuruqları üsulu»dur.*

(9.4), (9.5) şərti ekstremum məsələsinin Laqranj vuruqları üsulu ilə həlli prosesi aşağıdakı mərhələlərdən ibarətdir:

I. $L(X,\lambda)$ ***Laqranj funksiyasının tərtib edilməsi.***

Bu məqsədlə ***Laqranj vuruqları*** adlanan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dəyişənləri daxil edilməklə Laqranj funksiyası tərtib edilir:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=Z(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[a_i-g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right] \quad (9.6)$$

II. $L(X,\lambda)$ ***- nın X və*** λ ***dəyişənlərinə nəzərən xüsusi törəmələrinin tapılması.***

Burada müvafiq xüsusi törəmələr hesablanır:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial x_j}=\dfrac{\partial Z(X)}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}=0; & (j=\overline{1,n}) \\ \dfrac{\partial L(X,\lambda)}{\partial \lambda_i}=a_i-g_i(X)=0, & (i=\overline{1,m}) \end{cases} \quad (9.7)$$

III. Tənliklər sisteminin həlli.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z(X)}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda\dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}=0; & (j=\overline{1,n}) \\ a_i-g_i(X)=0, & (i=\overline{1,m}) \end{cases} \quad (9.8)$$

(9.8) sisteminin həlli nəticəsində *Z(X)* məqsəd funksiyasının ekstremum qiymət ala biləcəyi nöqtələr tapılır.

IV. Optimal həllin təyini.

Ekstremumun kafilik əlamətinin vasitəsi ilə şübhəli nöqtələr içərisində elə nöqtə tapılır ki, burada *Z(X)* məqsəd funksiyası maksimum (minimum) qiymət alır. Bu isə (9.4), (9.5) məsələsinin optimal həlli olur.

V. Z(X) funksiyasının ekstremum qiymətinin hesablanması.

Optimal həlli (9.4) ifadəsində nəzərə almaqla $Z_{max}(Z_{min})$ hesablanır.

9.3. Qeyri – xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinə aid misal

Məsələ. Sahənin iki müəssisəsində 200 vahid hər hansı məmulat hazırlamaq lazımdır. I müəssisədə x_1 vahid məmulatın istehsal xərcləri $4x_1^2$ manat, II müəssisədə x_2 vahid məmulatın istehsal xərcləri isə $(20x_2+6x_2^2)$ manat təşkil edir. Hər bir müəssisədə nə qədər məmulat hazırlamaq lazımdır ki, verilmiş plan tapşırığı yerinə yetirilsin və ümumi istehsal xərcləri minimum olsun.

Həlli

Verilmiş məsələnin şərtlərini nəzərə almaqla, onun iqtisadi-riyazi modelini aşağıdakı şəkildə formalaşdırırıq:

Məqsəd funksiyası

$$Z(X) = 4x_1^2 + 20x_2 + 6x_2^2 \to \min; \qquad (9.9)$$

məhdudiyyət şərtləri

$$x_1 + x_2 = 200, \qquad (9.10)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \qquad (9.11)$$

Burada (9.9) məqsəd funksiyası I və II müəssisələrdə ümumi istehsal xərclərini ifadə edir. Ona görə də bu funksiya üçün minimum qiymət axtarılır.

(9.10) şərti göstərir ki, məmulatın buraxılışı üzrə plan tapşırığı yerinə yetirilməlidir.

(9.11) şərtləri müvafiq olaraq I və II müəssisələrdə buraxılan məmulatın miqdarları üzrə verilir.

I. $L(X,\lambda)$ Laqranj funksiyasının tərtib edilməsi.

$$L(x_1,x_2,\lambda)=4x_1^2+20x_2+6x_2^2+\lambda[200-(x_1+x_2)]; \quad (9.12)$$

II. $L(x_1,x_2,\lambda)$-nın x_1, x_2 və λ-ya nəzərən xüsusi törəmələrinin tapılması.

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=8x_1-\lambda,$$
$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=20+12x_2-\lambda, \quad (9.13)$$
$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda}=200-x_1-x_2.$$

III. Tənliklər sisteminin həlli.

$$\begin{cases} 8x_1-\lambda=0, \\ 20+12x_2-\lambda=0, \\ 200-x_1-x_2=0 \end{cases} \quad (9.14)$$

Əvvəldəki iki tənlikdə λ dəyişənini sağ tərəflərə keçirsək, onda sol tərəflərin bir-birinə bərabər olmasından alırıq:

$$8x_1=20+12x_2 \text{ yaxud } 2x_1-3x_2=5 \quad (9.15)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 200 \end{cases} \qquad (9.16)$$

sistemini həll edib

$$X = (x_1 = 121, x_2 = 79); \qquad (9.17)$$

həlli tapılır ki, burada da *Z(X)* ekstremum qiymət ala bilər.

IV. Optimal həllin təyini.

İkinci tərtib xüsusi törəmələrdən istifadə etməklə, asanlıqla göstərmək olar ki, (9.17) həllində *Z(X)* funksiyası minimum qiymət alır. Deməli, (9.17) həlli (9.9) - (9.11) məsələsinin optimal həllidir.

V. Z(X) funksiyasının ekstremum qiymətinin hesablanması.

($x_1=121$, $x_2=79$) optimal həllini (9.9) - də nəzərə alıb hesablayırıq:

$$Z_{min} = 4\cdot121^2 + 20\cdot79 + 6\cdot79^2 = 38564 + 1580 + 37446 = 97590\ (ман)$$

Cavab: ***$x_1=121$ - I müəssisədə buraxılan məmulatın miqdarı,***

$x_2=79$ - II müəssisədə buraxılan məmulatın miqdarı,

$Z_{min} = 97590$ (ман.) ***- hər iki müəssisədə ümumi istehsal xərcləri.***

MÜSTƏQİL İŞİN YERİNƏ YETİRİLMƏSİ ÜZRƏ GÖSTƏRİŞLƏR

Müstəqil işin təyinatı – fənnin əsas məsələləri üzrə tələbələrin biliklərini dərinləşdirmək və onların aldıqları bilikləri praktikada tətbiq etmək bacarığını aşkar etməkdən ibarətdir.

1.Müstəqil işin məqsədi – bütövlükdə fənn üzrə tələbənin biliklərini müəyyənləşdirmək və möhkəmləndirməkdən ibarətdir. Bunun üçün fənnin proqramı, verilmiş tədris-metodik göstərişlər və həmçinin oxunmuş mühazirələrin mətnləri ilə tam həcmdə tanış olmaq zəruridir.

2.Məsələlərin həlli verilmiş müvafiq ilkin məlumatlar, həmçinin lazımi formulalar və qısa izahatlara əsaslanaraq müşayiət edilməlidir. Bu münasibətlə, hər şeydən əvvəl, tələbə lazım olan hesablama sxemini və yaxud düsturunu gətirməli, sonra isə məsələnin həlli gedişini ətraflı izah etməlidir. Düsturlar ədəbiyyatlarda verilmiş şəkildə istifadə olunmalıdır. Əgər hər hansı göstəricinin hesablanması üçün bir neçə üsul mövcuddursa, onlardan daha sadə olanını tətbiq etmək məsləhətdir və bununla bərabər (alınmış həllə nəzarət etmək məqsədi ilə) digər üsulları da göstərmək məqsədəuyğundur.

3. Tapşırıqların yerinə yetirilməsi prosesində aparılmış hesablamaları yoxlamaq, təyin edilən göstəricilər arasında qarşılıqlı əlaqələri təhlil etmək, həmçinin hər bir göstəricinin iqtisadi mənasına xüsusi diqqət vermək lazımdır.

4. Müstəqil iş səliqəli hazırlanmalı, mürəkkəblə, aydın və pozulub - düzəldilmədən yazılmalıdır. İşdə sözlərin ixtisar edilməsi (ümumi qəbul edilmiş ixtisarlar mümkündür) qadağandır. İşdə gətirilmiş hesablamalar, cədvəllər ümumi qəbul edilmiş qaydalara uyğun olmaqla göstərilməli, hər bir sətir və sütunun məzmunu, onların adları, müvafiq ölçü vahidləri dəqiq ifadə edilməlidir.

Səhifələr nömrələnməli və burada resenziya yazanın qeydləri üçün kifayət qədər kənar saxlanmalıdır.

5. Yerinə yetirilmiş işin sonunda istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı (müəllif, adı, səhifələri) verilməlidir.

6. Qəbul edilmiş mystəqil iş, müvafiq resenziya ilə birlikdə, tələbə müdafiə etmək üçün kafedraya təqdim etməlidir. Əgər mystəqil işdə resenziya yazan tərəfindən qeydlər edilmişdirsə, onları nəzərə almaq, buraxılmış səhv və xətaları düzəltdikdən sonra işi təkrar müdafiəyə təqdim etmək lazımdır.

7. Mystəqil işin tapşırıqları beş variantda tərtib edilmiş və tələbələr arasında onların familiyalarının baş hərflərindən asılı olmaqla bölüşdürülür:

Tələbələrin familiyalarının baş hərfləri	**Variantların nömrələri**
A, B, C, F, N, Z	I
D, Ə, İ, P, U, Y	II
Ç, E, K ,R, S, V	III
G, X, M, O, T, Ü	IV
H, Q, L, Ö, Ş	V

Bu və ya digər məsələnin həlli ilə əlaqədar müəyyən çətinliklər ortaya çıxdıqda yazılı məsləhət almaq üçün ADİU - nun « İqtisadi kibernetika və iqtisadi - riyazi üsullar » kafedrasına müraciət etmək olar.

MÜSTƏQİL İŞƏ AİD TAPŞIRIQLAR

I variant

Məsələ 1. Xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulla həll edin:

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min);$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Misal. Xətti tənliklər sistemini Jordan-Qauss üsulu ilə həll edin.

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 30, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 10x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 51, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 19 \end{cases}$$

Məsələ 2. İlkin məlumatlar aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Xammal növləri	**Məhsul vahidinə xammalın sərfi normaları, (kq)**			**Xammal ehtiyatları (kq)**
	A	**B**	**S**	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Məhsul vahidindən mənfəət, (man.)	9	10	15	-

1. A, B və S məhsullarının buraxılışı üzrə elə istehsal planları tərtib edin ki, ümumi mənfəət maksimum olsun.

2. Optimal plan üzrə xammal ehtiyatlarının istifadə olunmasını təhlil edin.

Məsələ 3. Məsələ 2-nin şərtlərində verilmiş ilkin məlumatlar əsasında tələb olunur:

1. Qoşma məsələnin riyazi modelini tərtib edin və onun iqtisadi mənasını formalaşdırın.
2. İstehsal ehtiyatlarının dəyişməsinə nəzərən qoşma qiymətlərin dayanıqlıq intervallarını tapın.
3. I və II növ istehsal ehtiyatları müvafiq olaraq 35 kq və 50 kq artırsa, III növ ehtiyatlar isə 12 kq azalırsa, onların hazır məhsul satışından əldə edilən maksimum ümumi mənfəətin dəyişməsinə ayrılıqda və birgə təsirini təyin edin.
4. Hazır məhsul vahidinin satışından mənfəət normasının dəyişməsinə nəzərən əsas məsələnin optimal planının dayanıqlıq intervallarını tapın.
5. Hazır məhsul satışından əldə edilən ümumi mənfəət və sərf olunmuş ehtiyatların ümumi dəyərini müqayisə edin.

Məsələ 4. Aşağıdakı məlumatlar verilmişdir:

Məhsul ehtiyatları $a_1 = 400, a_2 = 250, a_3 = 350.$

Məhsula olan tələbatlar $b_1 = 200, b_2 = 170, b_3 = 230, b_4 = 225, b_5 = 175.$

Məhsul vahidinin daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri

$$\left(c_{ij}\right)_{3,5} = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22 \\ 20 & 17 & 13 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$$

Verilmiş məlumatlar əsasında:

1) Nəqliyyat məsələsinin şərtlərini vahid cədvəl şəklində göstərin.

2) Onun iqtisadi-riyazi modelini qurun.

3) İstehsal və istehlak məntəqələri arasında elə yükdaşıma planı tərtib edin ki, ümumi nəqliyyat xərcləri minimum olsun.

Məsələ 5. Laqranj vuruqları üsulundan istifadə etməklə şərti ekstremumu tapın.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

II variant

Məsələ 1. Xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulla həll edin:

Məqsəd funksiyası

$Z(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \max(\min)$;

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \le 28 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Misal. Xətti tənliklər sistemini Jordan-Qauss üsulu ilə həll edin.

$$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -6, \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2, \\ 7x_1 - 17x_2 + x_3 - 2x_4 = 14 \end{cases}$$

Məsələ 2. İlkin məlumatlar aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Dəzgahların növləri	Məhsul vahidinin emalına iş vaxtının sərfi (s)		Dəzgahın ümumi iş vaxtı fondu, (s)
	A	B	
Frezer	10	8	168
Tokar	5	10	180
Cilalama	6	12	144
Məhsul vahidinin satışından mənfəət, (man.)	14	18	-

1. *A* və B məhsullarının buraxılışı üzrə elə istehsal planları tərtib edin ki, onların satışından maksimum mənfəət əldə edilsin.

2. Dəzgahların iş vaxtı fondlarından istifadə olunmasını təhlil edin.

Məsələ 3. Məsələ 2-nin şərtlərində verilmiş ilkin məlumatlar əsasında tələb olunur:

1. Qoşma məsələni həll edin və obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin iqtisadi mənasını izah edin.
2. Əgər frezer və cilalama dəzgahlarının faydalı iş vaxtlarının ümumi fondları müvafiq olaraq 30 s və 25 s artırsa, tokar dəzgahının ümumi iş vaxtı fondu isə 10 s azalırsa, onda məhsul buraxılışı üzrə optimal planı tapmalı.
3. Müəssisədə üç növ yeni D, G və E məmulatlarının buraxılışı üçün şərait yaranmışdır. Məmulat vahidinin emalı üzrə avadanlıqların iş vaxtının sərfi, həmçinin məmulat vahidinin satışından mənfəət normaları aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Dəzgahların növləri	**Məhsul vahidinin emalına iş vaxtının sərfi, (s)**		
	D	**G**	**E**
I. Frezer	4	3	7
II. Tokar	2	6	4
III. Cilalama	5	3	2
Məhsul vahidinin satışından mənfəət, (man.)	8	10	5

Yeni məmulatların istehsal planına daxil edilməsinin məqsədəuyğunluğunu qiymətləndirin.

Məsələ 4. Aşağıdakı məlumatlar verilmişdir:

Məhsul ehtiyatları $a_1 = 280,\ a_2 = 300,\ a_3 = 220.$

Məhsula olan tələbatlar $b_1 = 170,\ b_2 = 120,\ b_3 = 190,\ b_4 = 140,\ b_5 = 180.$

Məhsul vahidinin daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri

$$(c_{ij})_{3,5} = \begin{pmatrix} 28 & 12 & 7 & 18 & 7 \\ 35 & 14 & 12 & 15 & 3 \\ 30 & 16 & 11 & 25 & 15 \end{pmatrix}.$$

Verilmiş məlumatlar əsasında:

1) Nəqliyyat məsələsinin şərtlərini vahid cədvəl şəklində göstərin

2) Onun iqtisadi-riyazi modelini qurun

3) İstehsal və istehlak məntəqələri arasında elə yükdaşıma planı tərtib edin ki, ümumi nəqliyyat xərcləri minimum olsun.

Məsələ 5. İki avadanlıqda 80 vahid hər hansı məmulat hazırlamaq lazımdır. Əgər I avadanlıqda x_1 məmulat buraxılarsa, onda müvafiq xərclər $(2x_1 + x_1^2)$ manat təşkil edir. II avadanlıqda x_2 məmulat buraxildıqda isə $16x_2$ manat xərc tələb olunur.

Hər iki avadanlıqda məmulatların elə istehsal planlarını tapın ki, verilmiş tapşırıq yerinə yetirilsin və ümumi istehsal xərcləri minimum olsun.

III variant

Məsələ 1. Xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulla həll edin:

Məqsəd funksiyası

$Z(x) = -2x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$;

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Misal. Xətti tənliklər sistemini Jordan-Qauss üsulu ilə həll edin.

$$\begin{cases} 4x_1 - 43x_2 - 2x_4 = 62, \\ 17x_1 + 24x_2 + x_3 + x_4 = 78, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \end{cases}$$

Məsələ 2. Mebel fabrikində standart ölçüyə malik faner lövhələrdən müvafiq olaraq 24, 31 və 18 ədəd olmaqla üç növ tədarük hazırlamaq lazımdır. Bu zaman faner lövhəni iki üsulla kəsmək olar. Hər bir üsul tətbiq edildikdə faner vahidindən əldə edilən ayrı-ayrı növ tədarüklərin miqdarları və istehsal tullantıları cədvəldə verilmişdir.

Tədarük növləri	**Hər hansı üsul tətbiq edildikdə alınmış tədarükün miqdarı, (ədəd)**	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
İstehsal tullantıları, (sm^2)	12	16

Ayrı-ayrı üsulları tətbiq etməklə kəsilən faner lövhələrin elə miqdarını tə'yin edin ki, tədarük planları yerinə yetirilsin və ümumi istehsal tullantıları minimum olsun.

Məsələ 3. İlkin məlumatlar aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Xammal növləri	**Məhsul vahidinə xammalın sərfi normaları, (kq)**			**Xammal ehtiyatları, (kq)**
	A	**B**	**C**	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	236
Məhsul vahidinin qiyməti (man.)	10	14	12	-

1. A, B və C məmulatları üzrə elə istehsal planları tapmalı ki, onların reallaşdırılmasından maksimum ümumi gəlir təmin edilsin.
2. Qoşma məsələnin riyazi modelini qurun və onun optimal həllini tapın.
3. II və III növ xammal ehtiyatları müvafiq olaraq 80 kq və 160 kq artırsa, I növ xammal ehtiyatları isə 40 kq azalırsa, onların məhsul reallaşdırılmasından əldə edilən maksimum ümumi gəlirin dəyişməsinə ayrılıqda və birgə təsirini təyin edin.
4. Yeni növ məmulat vahidinə xammalın müvafiq sərfi normaları 2 kq, 4 kq və 3 kq, məhsul vahidinin qiyməti isə 15 manat olarsa, onun istehsal planına daxil edilməsinin məqsədəuyğunluğunu qiymətləndirin.

Məsələ 4. Aşağıdakı məlumatlar verilmişdir:

Məhsul ehtiyatları $a_1 = 150, a_2 = 200, a_3 = 150.$

Məhsula olan tələbatlar $b_1 =160,\ b_2 =70,\ b_3 =90,$ $b_4 =80,\ b_5 =100.$

Məhsul vahidinin daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri

$$(c_{ij})_{3,5} = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19 \end{pmatrix}.$$

Verilmiş məlumatlar əsasında:

1) Nəqliyyat məsələsinin şərtlərini vahid cədvəl şəklində göstərin

2) Onun iqtisadi-riyazi modelini qurun

3) İstehsal və istehlak məntəqələri arasında elə yükdaşıma planı tərtib edin ki, ümumi nəqliyyat xərcləri minimum olsun.

Məsələ 5. Laqranj vuruqları üsulundan istifadə etməklə şərti ekstremumu tapın.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2x_3$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19, \\ x_1 + 2x_2x_3 = 11. \end{cases}$$

IV variant

Məsələ 1. Xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulla həll edin:

Məqsəd funksiyası

$Z(x) = x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min);$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Misal. Xətti tənliklər sistemini Jordan-Qauss üsulu ilə həll edin.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 - 18x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 36, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 17, \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 46 \end{cases}$$

Məsələ 2. İlkin mə'lumatlar aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Xammal növləri	**Məhsul vahidinə xammalın sərfi normaları, (kq)**		**Xammal ehtiyatları (kq)**
	A	**B**	
I	8	3	864
II	7	6	864
III	4	9	945
Məhsul vahidindən mənfəət, (man)	2	3	-

1. A və B məhsullarının buraxılışı üzrə elə istehsal planları tərtib edin ki, məhsul satışından əldə edilən ümumi mənfəət maksimum olsun.
2. Optimal plan üzrə xammal ehtiyatlarının istifadə olunmasını təhlil edin.

Məsələ 3. Məsələ 2-nin şərtlərində verilmiş ilkin məlumatlar əsasında tələb olunur:

1. Qoşma məsələnin riyazi modelini tərtib edin və onun itisadi mənasını formalaşdırın.
2. Qoşma məsələni həll edin. Xammal ehtiyatları üçün alınmış obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin iqtisadi mənasını izah edin.
3. İstehsal ehtiyatlarının dəyişməsinə nəzərən qoşma qiymətlərin dayanıqlıq intervallarını tapın.
4. I və III növ istehsal ehtiyatları müvafiq olaraq 45 kq və 20 kq artırsa, II növ ehtiyatlar isə 16 kq azalırsa məhsul buraxılışı üzrə optimal planı tapın.
5. Hazır məhsul satışından əldə edilən ümumi mənfəət və sərf olunmuş ehtiyatların ümumi dəyərini müqayisə edin.

Məsələ 4. Aşağıdakı məlumatlar verilmişdir:

Məhsul ehtiyatları $a_1 = 300$, $a_2 = 280$, $a_3 = 220$.

Məhsula olan tələbatlar $b_1 = 180$, $b_2 = 140$, $b_3 = 190$, $b_4 = 120$, $b_5 = 170$.

Məhsul vahidinin daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri

$$(c_{ij})_{3,5} = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 9 & 10 & 16 \\ 13 & 15 & 11 & 13 & 21 \\ 19 & 26 & 12 & 17 & 20 \end{pmatrix}.$$

Verilmiş məlumatlar əsasında:

1) Nəqliyyat məsələsinin şərtlərini vahid cədvəl şəklində göstərin.

2) Onun iqtisadi-riyazi modelini qurun.

3) İstehsal və istehlak məntəqələri arasında elə yükdaşıma planı tərtib edin ki, ümumi nəqliyyat xərcləri minimum olsun.

Məsələ 5. Müəssisədə hər hansı məhsulu iki texnoloji üsulla istehsal etmək mümkündür. Əgər I üsulla x_1 vahid məhsul istehsal olunursa, onda müvafiq xərclər $(5x_1 + x_1^2)$ manat təşkil edir. II üsulla x_2 vahid məhsul istehsalı isə $9x_2$ manat xərclə başa gəlir.

Hər iki texnoloji üsulla elə məhsul istehsalı planları tə'yin edin ki, 40 ədəd məhsul buraxılışı tapşırığı yerinə yetirilsin və ümumi xərclər ən az olsun.

V variant

Məsələ 1. Xətti proqramlaşdırma məsələsini qrafik üsulla həll edin:

Məqsəd funksiyası

$Z(x) = -2x_1 + 5x_2 \to$ max (min);

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Misal. Xətti tənliklər sistemini Jordan-Qauss üsulu ilə həll edin.

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad -2x_3 + x_4 = 15, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 43, \\ 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 53, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16 \end{cases}$$

Məsələ 2. İlkin məlumatlar aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Xammal növləri	**Məhsul vahidinə xammalın sərfi normaları, (kq)**		**Xammal ehtiyatları (kq)**
	A	**B**	
I	12	3	684
II	10	5	690
III	3	6	558
Məhsul vahidindən mənfəət, (man)	6	2	-

1. *A* və *B* məhsullarının buraxılışı üzrə elə istehsal planları tərtib edin ki, məhsul satışından əldə edilən ümumi mənfəət maksimum olsun.
2. Optimal plan üzrə xammal ehtiyatlarının istifadə olunmasını təhlil edin.

Məsələ 3. Məsələ 2-nin şərtlərində verilmiş ilkin məlumatlar əsasında tələb olunur:

1. Qoşma məsələnin riyazi modelini tərtib edin və onun optimal həllini tapın.
2. Obyektiv şərtləşdirilmiş qiymətlərin iqtisadi mənasını izah edin.
3. Müəssisədə iki növ yeni L və M məmulatlarının buraxılışı üçün şərait yaranmışdır. Məmulat vahidinin istehsalı üzrə xammal ehtiyatlarının sərfi və məhsul vahidinin satışından mənfəət normaları aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Xammal növləri	**Məhsul vahidinə xammalın sərfi normaları, (kq)**	
	L	**M**
I	5	2
II	3	7
III	4	1
Məmulat vahidinin satışından mənfəət, (man.)	9	6

Yeni məmulatların istehsal planına daxil edilməsinin məqsədəuyğunluğunu qiymətləndirin.

4. Məmulat vahidinin satışından mənfəət normasının dəyişməsinə nəzərən düz məsələnin optimal planının dayanıqlıq intervallarını tapın.

Məsələ 4. Aşağıdakı məlumatlar verilmişdir:

Məhsul ehtiyatları $a_1 = 250,\ a_2 = 400,\ a_3 = 350.$

Məhsula olan tələbatlar $b_1 = 300,\ b_2 = 160,\ b_3 = 220,\ b_4 = 180,\ b_5 = 140.$

Məhsul vahidinin daşınması ilə əlaqədar nəqliyyat xərcləri

$$(c_{ij})_{3,5} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 7 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 16 & 19 & 40 & 15 & 25 \end{pmatrix}.$$

Verilmiş məlumatlar əsasında:

1) Nəqliyyat məsələsinin şərtlərini vahid cədvəl şəklində göstərin.
2) Onun iqtisadi-riyazi modelini qurun.
3) İstehsal və istehlak məntəqələri arasında elə yükdaşıma planı tərtib edin ki, ümumi nəqliyyat xərcləri minimum olsun.

Məsələ 5. Laqranj vuruqları üsulundan istifadə etməklə şərti ekstremumu tapın.

Məqsəd funksiyası

$$Z(x) = x_1 x_2 x_3$$

məhdudiyyət şərtləri

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 8. \end{cases}$$

ƏDƏBİYYAT

Əsas

1. B.Musayev, Ş.Səmədzadə – Planlaşdırmanın riyazi üsulları və modelləri. Bakı, 1973
2. S.Əbdürəhmanov, Ə.Mirzəyev, S.Şamoyev – Riyazi proqramlaşdırma. Bakı, 1983
3. A.Əliyev – Riyazi proqramlaşdırma üzrə tədris – metodik gystərişlər. Bakı, 2002
4. Акулич И.Л. – Математическое программирование в примерах и задачах. М., 1986
5. Е.В.Бережная, В.И.Бережной – Математические методы моделирования экономических систем. М., 2001
6. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. – Линейное и выпуклое программирование. М., 1967
7. Исследование операций в экономике. М., 1997
8. Конюховский П. – Математические методы исследования операций в экономике. Санкт-Петербург, 2000
9. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волошенко А.Б. – Математическое программирование. М., 1980
10. Общий курс высшей математики для экономистов. М.,2001
11. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. – Математика в экономике. Часть 1. М., 2000
12. Экономико-математические методы и прикладные модели. М., 1999

Əlavə

13. Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В. – Математичсские методы в экономике. М., 1999
14. Карасев А.И.. Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. – Математические методы и модели в планировании. М., 1987
15. Коршунова Н., Плясунов В. – Математика в экономике. М., 1996